Collusion dans les Enchères: Quelques Apports des Jeux Coopératifs

Riham Barbar*et Françoise Forges†

janvier 2007

Résumé: Nous considérons la vente aux enchères sous pli scellé au second prix d'un objet que chaque acquéreur potentiel évalue de manière "privée et indépendante". Nous montrons que l'optimum *ex ante* d'un cartel, sous contraintes d'incitation et d'équilibre *ex post* des transferts, coïncide avec son optimum de premier rang et définit une fonction caractéristique sur-modulaire. En recourant à deux concepts de solution standards, le cœur et la valeur de Shapley, nous montrons notamment que tout cartel est stable et que les enchérisseurs ont intérêt à se regrouper en cartels de taille aussi grande que possible. Nous illustrons les difficultés d'une extension de nos résultats au cadre des "valeurs communes".

Abstract: We consider the second price sealed bid auction of an object that the potential buyers value privately and independently. We show that a cartel's *ex ante* optimum, subject to incentive compatibility and *ex post* balanced transfers, coincides with the first best and defines a supermodular characteristic function. By using two standard solution concepts, the core and the Shapley value, we show, among other properties, that every cartel is stable and that bidders gain in forming cartels whose size is as large as possible. We illustrate the difficulties to extend our results in the context of common values.

*EDOCIF et EURISCO, Université Paris-Dauphine

†CEREMADE et EURISCO, Université Paris-Dauphine

1 Introduction

L'étude des enchères apparaît comme l'une des applications les plus visibles de la théorie des jeux. Qu'il s'agisse du premier pas de Vickrey (1961), de l'étape déterminante de Milgrom et Weber (1982), ou des travaux innombrables relatés dans les ouvrages récents de Klemperer (2004), Krishna (2002) ou Milgrom (2004), c'est la théorie des jeux *non-coopératifs*, celle qui s'intéresse au comportement stratégique des agents rationnels, qui est systématiquement utilisée.

A première vue, une vente aux enchères constitue effectivement un jeu non-coopératif entre les acheteurs potentiels, le commissaire priseur tenant un rôle à part. Cependant, une telle modélisation suppose l'indépendance stratégique des joueurs, une hypothèse contredite par la tendance de certains enchérisseurs à s'entendre au préalable. En pratique, les vrais acteurs d'un jeu d'enchères sont non pas des individus isolés, mais des cartels. En effet, les mécanismes d'enchère classiques, comme l'enchère au second prix que nous considérons ci-après, ne sont pas conçus pour résister à la collusion implicite des agents¹. Il est donc essentiel d'étudier la formation des coalitions d'enchérisseurs, leur stabilité et la manière dont elles répartissent leurs profits. C'est là le champ de la théorie des jeux *coopératifs*.

Nous partons du modèle le plus simple possible: la vente aux enchères sous pli scellé au second prix d'un objet que chaque acquéreur potentiel évalue de manière "privée et indépendante". Chaque enchérisseur a alors une stratégie faiblement dominante très simple, qui consiste à faire une offre égale à la valeur qu'il attribue à l'objet. Nous supposons qu'un cartel se forme avant même que ses membres aient estimé précisément la valeur de l'objet convoité. Cet enchaînement a du sens dans la mesure où les participants à une enchère ne peuvent souvent procéder à une expertise personnelle que peu de temps avant la vente. Ils peuvent donc avoir à s'engager dans un cartel avant de s'être fait une idée définitive de la valeur de l'objet. Formé *ex ante*, le cartel met en œuvre à l'étape *interim* un mécanisme qui recueille les évaluations de ses membres et choisit en conséquence un enchérisseur privilégié et des transferts. L'enchérisseur privilégié représente le cartel à l'enchère, tandis que les autres membres font une offre dérisoire. L'objectif du cartel est de maximiser son profit espéré *ex ante*, sous contrainte que le mécanisme soit

¹Crémer (1996) montre, de manière générale, que les mécanismes de Groves résistent mal à la collusion des agents.

faisable (c'est-à-dire, essentiellement, satisfasse une contrainte budgétaire *ex post*) et incitatif (c'est-à-dire tel que les membres révèlent sincèrement leurs évaluations). Des mécanismes de ce type sont couramment utilisés pour représenter les stratégies accessibles à un cartel (voir par exemple Mailath et Zemsky (1991)). Nous les décrivons en détails dans la section 2.

Comme les valeurs sont “privées et indépendantes” et que l’enchère est au second prix, les enchérisseurs qui ne font pas partie d’un cartel I exercent sur I des externalités limitées. En supposant que ces joueurs hors cartel appliquent leur stratégie dominante, on obtient une expression bien définie du profit espéré *ex ante* optimal $\Psi(I)$ du cartel I , qui donne lieu à une fonction caractéristique “*ex ante* incitative”, comparable à celle qui a été introduite par Forges, Mertens et Vohra (2002) pour les économies d’échange en information incomplète. Les valeurs étant privées et indépendantes, la méthode de Groves (1973) permet au cartel d’atteindre son optimum de premier rang tout en respectant les contraintes d’incitation; en modifiant les transferts à la manière de d’Aspremont et Gérard-Varet (1979)), on réalise même la contrainte budgétaire *ex post*. Comme nous l’établissons formellement dans la section 3 (proposition 1), la fonction caractéristique *ex ante* incitative est donc aisément calculable: elle correspond au profit espéré *ex ante* optimal de premier rang de chaque cartel, réalisé en envoyant à l’enchère le membre du cartel qui attribue à l’objet la valeur la plus élevée. Mailath et Zemsky (1991) parviennent à une variante de cette fonction caractéristique par des méthodes un peu différentes. Nous comparons leur approche à la nôtre à la fin de la section 3.

Dans les sections 4 et 5, nous appliquons deux concepts de solution traditionnels, le cœur et valeur de Shapley, au jeu coopératif décrit par la fonction caractéristique *ex ante* incitative. Nous montrons que celle-ci est surmodulaire² (proposition 2), une propriété déjà notée par Graham, Marshall et Richard (1990) dans le cas particulier de l’information complète. Nous déduisons de la surmodularité de notre fonction caractéristique que le cœur (*ex ante* incitatif) de tout sous-jeu est non-vide, c’est-à-dire qu’un cartel quelconque est “stable” au sens où aucun sous-cartel ne peut gagner à s’en désolidariser (proposition 3). La maximisation du profit conduit plutôt les cartels à accueillir de nouveaux membres. En effet, une allocation dans le cœur d’un sous-jeu peut être étendue à un cartel plus large, sans diminuer la part des joueurs initiaux ni mettre en péril la stabilité du cartel (proposition

²Suivant une terminologie plus ancienne, le jeu coopératif est “convexe”.

4). L'étude de la valeur de Shapley montre de façon plus précise l'intérêt des enchérisseurs à se regrouper en cartels de taille aussi grande que possible: le pouvoir d'un agent dans un cartel, mesuré par sa valeur de Shapley *ex ante* incitative, croît avec la taille du cartel dont il fait partie (proposition 5). Cette propriété, qui ne suppose pas que les agents soient semblables (i.e., que leurs évaluations soient identiquement distribuées), généralise un résultat de Mailath et Zemsky (1991). Son intérêt est renforcé par une construction de Graham, Marshall et Richard (1990), qui permet d'obtenir la valeur de Shapley *ex ante* incitative comme paiement espéré des membres d'un cartel à l'issue d'une procédure de pré-enchère aux transferts *ex ante* judicieusement choisis.

Nous envisageons finalement, dans la section 6, un autre modèle standard quant aux acheteurs potentiels, connu sous le nom de "valeur commune". Nous montrons sur un exemple que dans ce cadre, un cartel doit tenir compte des effets externes liés à la manière dont se regroupent les agents qui ne font pas partie du cartel. Le jeu coopératif se décrit alors par une "forme partitionnelle", plutôt que par une fonction caractéristique.

2 Mécanismes de collusion

Nous considérons n acheteurs potentiels, $i = 1, \dots, n$, neutres vis à vis du risque, qui attribuent chacun une valeur purement subjective à un objet mis aux enchères sous pli scellé, au second prix. Le vendeur ne fixe pas de prix de réserve. Nous notons $\tilde{v}^i$ la variable aléatoire représentant l'évaluation de l'agent i , c'est-à-dire la valeur personnelle que l'agent i attribue à l'objet, et v^i une réalisation typique de $\tilde{v}^i$; nous supposons que $\tilde{v}^i$ suit une distribution F^i , de densité f^i , sur $V^i = [\underline{v}^i, \bar{v}^i]$ et que les v.a. $\tilde{v}^i$, $i = 1, \dots, n$, sont indépendantes.

Imaginons qu'un cartel $I \subseteq N = \{1, \dots, n\}$ se forme *ex ante*, c'est-à-dire avant que les agents aient pris connaissance de leurs évaluations. I devra, le moment venu, sélectionner un représentant $i^* \in I$ qui enchérira au nom du cartel ainsi que des transferts $(m^i)_{i \in I}$ tels que $\sum_{i \in I} m^i \leq 0$, c'est-à-dire "balancés" *ex post*. A cette fin, I choisit *ex ante* un mécanisme (δ_I, μ_I) qui, à l'étape *interim*, déterminera représentant et transferts en fonction des évaluations transmises par les membres de I . Plus précisément, soit $\Delta(I)$

l'ensemble des distributions de probabilité sur I et

$$M_I = \left\{ m \in \mathbb{R}^I : \sum_{i \in I} m^i \leq 0 \right\} \quad (1)$$

Un mécanisme pour I est une fonction $(\delta_I, \mu_I) : \prod_{i \in I} V_i \rightarrow \Delta(I) \times M_I$.³ En particulier, les transferts μ_I sont balancés *ex post*. L'interprétation est la suivante:

- I se constitue et choisit un mécanisme (δ_I, μ_I) .
- Les agents $j = 1, \dots, n$ apprennent leurs évaluations v^j .
- Les membres de I sont invités à révéler leurs évaluations au mécanisme; soit w^i la déclaration de $i \in I$, éventuellement différente de v^i .
- Etant donné $w_I = (w^i)_{i \in I}$, le représentant i^* de I est choisi suivant la distribution de probabilité $\delta_I(w_I)$ et chaque membre i de I reçoit le transfert $\mu^i(w_I)$.
- i^* est le seul membre de I qui participe effectivement à l'enchère : $i \neq i^*$ fait une offre nulle $b^i = 0$; i^* fait une offre b^{i^*} de son choix.
- L'enchère au second prix se déroule de façon standard: chaque agent $j \in N$ fait une offre b^j ; l'enchérisseur k qui fait l'offre la plus élevée, c'est-à-dire telle que $b^k = \max_{j \in N} b^j$, emporte l'objet pour le prix $\max_{j \in N, j \neq k} b^j$.⁴
- En particulier, s'il gagne, i^* paie le second prix au commissaire priseur et emporte l'objet.

Afin de construire un mécanisme optimal pour le cartel I , il importe d'explicitier les contraintes sous-entendues dans le scénario ci-dessus. Pour

³Ce type de mécanisme de collusion a été proposé par Mailath et Zemsky (1992), qui considèrent, en sus des conditions d'incitation ci-après (5), des conditions de participation individuelles à l'étape *interim*. Nous commenterons cet article en détails à la fin de la section 3. Nous envisagerons aussi d'autres mécanismes de collusion (voir la remarque 2, section 3).

⁴Si plusieurs enchérisseurs font l'offre maximale, on tire au sort le gagnant. Nous ne tiendrons pas explicitement compte de cette éventualité, afin d'alléger l'exposé.

ce qui est de la participation des agents, nous supposons pour l'instant que ceux-ci ne peuvent quitter le cartel après avoir fixé leurs évaluations. Nous supposons aussi que le cartel contrôle parfaitement la présence de ses membres à l'enchère: un agent $i \neq i^*$, qui ne représente pas le cartel, est dans l'impossibilité d'enchérir. Cependant, le cartel ne contrôle pas l'offre b^{i^*} de son représentant i^* ; celui-ci est sélectionné sur la base des estimations déclarées par les membres du cartel, mais agit ensuite librement lors de l'enchère⁵. Il est naturel de supposer qu'indépendamment de son comportement vis à vis du mécanisme, i^* adopte dans l'enchère au second prix sa stratégie faiblement dominante, c'est-à-dire $b^{i^*} = v^{i^*}$. Nous faisons la même hypothèse quant au comportement stratégique des enchérisseurs hors cartel: $b^j = v^j, j \in N \setminus I$.⁶ Nous supposons donc que le cartel peut contrôler le comportement de ses membres jusqu'à un certain point. Cependant, les valeurs étant purement subjectives, le cartel doit inciter ses membres à les révéler. Nous détaillons maintenant les conditions d'incitation correspondantes.

Fixons un membre i de I , d'évaluation v^i . Sous les hypothèses ci-dessus, son utilité espérée, pour une décision (i^*, m_I) , est, compte tenu de l'indépendance des v.a. $\tilde{v}^j$,

$$E \left[\left(v^i - \max_{j \in N \setminus I} \tilde{v}^j \right)^+ \right] I(i^* = i) + m^i \quad (2)$$

où $(.)^+ = \max(., 0)$ et $I(.)$ est la fonction indicatrice. Grâce au caractère privé des évaluations des membres de I , l'expression précédente, (2), ne dépend pas directement de $v^k, k \in I, k \neq i$.

L'utilité espérée pour i du mécanisme (δ_I, μ_I) , si i transmet w^i , éventuellement différente de v^i , tandis que les autres membres de I révèlent correctement leurs évaluations, est

$$U^i(\delta_I, \mu_I \mid v^i, w^i) = E \left[\left(v^i - \max_{j \in N \setminus I} \tilde{v}^j \right)^+ \delta_I^i(w^i, \tilde{v}_{I \setminus i}) + \mu_I^i(w^i, \tilde{v}_{I \setminus i}) \right] \quad (3)$$

⁵En pratique, la mise en œuvre de tels accords au sein d'un cartel peut rencontrer des difficultés (voir par exemple Chen et Tauman (2006)). Voir aussi la remarque 2, section 3, pour des variantes du mécanisme.

⁶L'importance de l'hypothèse sur l'absence à l'enchère des membres $i \neq i^*$ est toute relative. Si le mécanisme choisit comme représentant celui qui annonce l'évaluation la plus élevée, et que les agents $j \neq i$ révèlent correctement v^j , alors i ne peut rien gagner en participant à l'enchère.

où $\tilde{v}_{I \setminus i} = (\tilde{v}^j)_{j \in I \setminus i}$. Le scénario décrit ci-dessus est évidemment motivé par l'application du principe de révélation. On se concentre donc sur les stratégies sincères des membres du cartel. Posons

$$U^i(\delta_I, \mu_I \mid v^i) = U^i(\delta_I, \mu_I \mid v^i, v^i) \quad (4)$$

Le mécanisme (δ_I, μ_I) est *incitatif* si les stratégies qui consistent, pour chaque agent, à révéler correctement son évaluation forment un équilibre de Nash du jeu induit par (δ_I, μ_I) à l'étape de transmission d'information, c'est-à-dire si

$$U^i(\delta_I, \mu_I \mid v^i) \geq U^i(\delta_I, \mu_I \mid v^i, w^i) \quad \forall i \in I, v^i, w^i \in V^i \quad (5)$$

L'utilité espérée *ex ante* correspondante de l'agent i est

$$\begin{aligned} U^i(\delta_I, \mu_I) &= E [U^i(\delta_I, \mu_I \mid \tilde{v}^i)] \\ &= E \left[\left(\tilde{v}^i - \max_{j \in N \setminus I} \tilde{v}^j \right)^+ \delta_I^i(\tilde{v}_I) + \mu_I^i(\tilde{v}_I) \right] \end{aligned} \quad (6)$$

L'utilité espérée *ex ante* du cartel I , pour un mécanisme incitatif (δ_I, μ_I) , est donc $\sum_{i \in I} U^i(\delta_I, \mu_I)$.

Remarque 1: L'analyse précédente a été menée du point de vue d'un cartel donné I , sans envisager explicitement la possibilité de regroupement des joueurs de $N \setminus I$ en un ou plusieurs cartels. Cependant, l'expression (2) et partant, toutes les utilités espérées considérées ci-dessus, ne dépendent que du fait que les membres de $N \setminus I$ fassent une offre égale à leur vraie évaluation. Elles sont donc valides pour autant que les cartels éventuels au sein de $N \setminus I$ appliquent chacun leur stratégie faiblement dominante (en surmontant leurs propres contraintes d'incitation, ce qui est aisément accessible, comme le montrera la section suivante). Deux aspects du modèle permettent de limiter l'effet d'externalité de $N \setminus I$ sur I : d'une part, les évaluations des acheteurs potentiels sont purement subjectives et indépendantes; d'autre part, l'enchère est au second prix.

3 Fonction caractéristique

La stratégie d'un cartel I a la forme d'un mécanisme (δ_I, μ_I) ; sa fonction objectif est son utilité espérée *ex ante*, qu' I doit maximiser sous les contraintes d'incitation (5). Comme dans Forges, Mertens et Vohra (2002), on

peut définir la fonction caractéristique suivante:

$$\Psi(I) =_{\text{déf}} \max_{(\delta_I, \mu_I) \text{ incitatif}} \left[\sum_{i \in I} U^i(\delta_I, \mu_I) \right]$$

Les contraintes d'incitation sont susceptibles de rendre complexe le calcul de $\Psi(I)$. Mais en l'absence de ces contraintes, la détermination de l'optimum - "de premier rang" - est immédiate:

$$\Psi_{1^{er} \text{ rang}}(I) =_{\text{déf}} \max_{(\delta_I, \mu_I)} \left[\sum_{i \in I} U^i(\delta_I, \mu_I) \right] = E \left[\left(\max_{i \in I} \tilde{v}^i - \max_{j \in N \setminus I} \tilde{v}^j \right)^+ \right]$$

En effet, si le cartel I connaît d'emblée les évaluations v^i , $i \in I$, il ne peut faire mieux que d'envoyer à l'enchère le plus offrant de ses membres (i^* tel que $v^{i^*} = \max_{i \in I} v^i$), qui y joue selon sa stratégie sincère, faiblement dominante, et de distribuer des transferts de somme nulle ou "balancés exactement" *ex post* (c'est-à-dire tels que la condition de faisabilité dans (1) soit satisfaite à l'égalité). Ceci décrit un mécanisme efficace *ex post* pour I . Evidemment, $\Psi(I) \leq \Psi_{1^{er} \text{ rang}}(I)$. Mais les valeurs privées et indépendantes, associées à la quasi-linéarité des fonctions d'utilité, nous permettent de construire, suivant une procédure bien connue (voir par exemple d'Aspremont et Gérard-Varet (1979, 1982) ou d'Aspremont, Crémer et Gérard-Varet (1992)), un mécanisme (δ_I^*, μ_I^*) *incitatif* qui atteigne l'optimum de premier rang, c'est-à-dire tel que $\sum_{i \in I} U^i(\delta_I^*, \mu_I^*) = \Psi_{1^{er} \text{ rang}}(I)$. On a donc le résultat suivant (analogue à celui de Forges, Mertens et Vohra (2002) pour des économies d'échange spécifiques):

Proposition 1 $\Psi(I) = \Psi_{1^{er} \text{ rang}}(I) = E \left[\left(\max_{i \in I} \tilde{v}^i - \max_{j \in N \setminus I} \tilde{v}^j \right)^+ \right]$

Démonstration: Nous rappelons les grandes lignes du raisonnement classique, afin de voir comment il s'applique dans notre cadre. On part du mécanisme efficace *ex post* le plus simple $(\delta_I^*, 0)$, qui envoie le membre de I le plus offrant⁷ à l'enchère et n'effectue aucun transfert:

$$\delta_I^{*i}(w_I) = I(i = \arg \max_{k \in I} w^k)$$

⁷Comme on l'a déjà signalé, on néglige les *ex aequo*, afin de ne pas alourdir l'exposé de tirages au sort. Les évaluations vraies sont presque sûrement distinctes.

où, comme précédemment, $w_I = (w^k)_{k \in I}$ représente les déclarations des agents. $(\delta_I^*, 0)$ n'est clairement pas incitatif, car un agent i peut avoir intérêt à exagérer son estimation, par exemple en prétendant que celle-ci vaut $\bar{v}^i$, pour maximiser ses chances de participation à l'enchère (dans laquelle rien ne l'empêchera de faire une offre égale à son évaluation vraie).

Suivant la procédure de Groves (1973), on construit des transferts qui rendent incitatif le mécanisme efficace *ex post*.⁸ Compte tenu de (2), ces transferts prennent ici la forme suivante:

$$\begin{aligned}\nu_I^i(w_I) &= \sum_{l \neq i} E \left[\left(w^l - \max_{j \in N \setminus I} \tilde{v}^j \right)^+ \right] I \left(l = \arg \max_{k \in I} w^k \right) \\ &= E \left[\left(\max_{k \in I} w^k - \max_{j \in N \setminus I} \tilde{v}^j \right)^+ \right] I \left(i \neq \arg \max_{k \in I} w^k \right)\end{aligned}$$

L'effet de (δ_I^*, ν_I) sur un agent i d'évaluation v^i qui déclare w^i est donc: si $w^i = \max_{k \in I} w^k$, i ne reçoit pas de transfert, va à l'enchère et obtient au mieux $E \left[\left(v^i - \max_{j \in N \setminus I} \tilde{v}^j \right)^+ \right]$; sinon, i reçoit le transfert $E \left[\left(\max_{k \in I} w^k - \max_{j \in N \setminus I} \tilde{v}^j \right)^+ \right]$; ainsi, i ne perd rien à déclarer $w^i = v^i$.

Cependant, rien ne garantit que les transferts ν_I soient balancés exactement *ex post*. Soit $\bar{\nu}_I$ les transferts espérés, définis par

$$\bar{\nu}_I^i(w^i) = E(\nu_I^i(w^i, \tilde{v}_{I \setminus i})) \quad i \in I$$

Grâce à l'indépendance des $\tilde{v}_i$, $\bar{\nu}_I^i(w^i)$ ne dépend que de la déclaration w^i de i , non de son évaluation vraie. $(\delta_I^*, \bar{\nu}_I)$ est encore incitatif. On modifie à nouveau les transferts, sous la forme:

$$\mu_I^{*i}(w_I) = \bar{\nu}_I^i(w^i) - \frac{1}{|I| - 1} \sum_{k \neq i} \bar{\nu}_I^k(w^k)$$

Les conditions d'incitation restent vérifiées, et les transferts μ_I^* sont balancés exactement *ex post*: $\sum_{i \in I} \mu_I^{*i}(w_I) = 0$. (δ_I^*, μ_I^*) est donc un mécanisme incitatif qui atteint l'optimum de premier rang. ■

⁸On parle souvent de mécanismes "VCG" pour rappeler les contributions indépendantes de Vickrey (1961), Clarke (1971) et Groves (1973) à cette construction (voir par exemple Krishna (2002) pour diverses applications de ces mécanismes aux enchères).

Remarque 1 (suite): La construction précédente confirme que, si les évaluations sont privées et indépendantes et que l’enchère soit au second prix, le sort d’un cartel I n’est pas affecté par la structure de coalitions au sein de $N \setminus I$, pour autant que l’on suppose que ces sous-coalitions soient “rationnelles”, au sens de faire chacune une offre efficace *ex post*. En l’absence de contraintes d’incitation, une sous-coalition $J \subseteq N \setminus I$ a les mêmes possibilités qu’un individu d’évaluation $\max_{j \in J} v^j$: faire une offre égale à ce montant constitue donc une stratégie faiblement dominante pour J . Par ailleurs, on vient de voir qu’un cartel se libère des conditions d’incitation par des transferts adéquats.

Remarque 2: De nombreuses variantes du mécanisme de collusion décrit dans la section 2 sont évidemment concevables. On peut imaginer par exemple que le médiateur fiable qui recueille des informations auprès des membres du cartel va lui-même à l’enchère au nom du cartel (voir, entre autres, Cailaud et Jehiel (1998)⁹). Le mécanisme prend alors la forme $(\beta_I, \delta_I, \mu_I)$, avec $\beta_I : \prod_{i \in I} V^i \rightarrow \mathbb{R}$ l’offre du cartel à l’enchère, en fonction des déclarations des membres du cartel, et (δ_I, μ_I) de la même forme que ci-dessus, mais δ_I^i s’interprétant maintenant comme la probabilité que i obtienne l’objet en cas de succès du cartel à l’enchère. On écrit aisément l’analogue de (2), et la propriété de valeurs privées est maintenue. L’utilité d’un agent $i \in I$, d’estimation v^i , qui déclare w^i est

$$E \left[\left(v^i - \max_{j \in N \setminus I} \tilde{v}^j \right)^+ I \left(\beta_I(w^i, \tilde{v}_{I \setminus i}) \geq \max_{j \in N \setminus I} \tilde{v}^j \right) \delta_I^i(w^i, \tilde{v}_{I \setminus i}) + \mu_I^i(w^i, \tilde{v}_{I \setminus i}) \right]$$

On peut ainsi formuler les conditions d’incitation pour $(\beta_I, \delta_I, \mu_I)$ en procédant comme dans la section 2. Une telle modification du mécanisme n’altérant ni le caractère privé des évaluations, ni l’optimum de premier rang, on trouve la même fonction caractéristique que dans la proposition 1.

En requérant que les transferts ne soient balancés qu’en moyenne, c’est-à-dire *ex ante*, Graham et Marshall (1987), puis Graham, Marshall et Richard (1990) obtiennent des mécanismes incitatifs en stratégies dominantes, qui jouissent d’autres propriétés remarquables. Ces mécanismes peuvent se voir

⁹Dans cet article, l’utilité d’un agent qui n’obtient pas l’objet est différente suivant que l’objet n’est pas vendu ou qu’un autre enchérisseur l’acquiert. Le résultat d’efficacité *ex post* contenu dans la proposition 1 n’est plus vrai dans ce cas.

comme une pré-enchère au second prix, organisée au sein du cartel avant l'enchère effective (voir Krishna (2002, chapitre 12) pour une comparaison des mécanismes suivant leurs contraintes budgétaires).

Exemple 1: Nous illustrons d'abord le calcul de la fonction caractéristique Ψ dans le cas d'enchérisseurs semblables, dont les évaluations $\tilde{v}^i$ sont identiquement distribuées, suivant une fonction de distribution F sur $V = [\underline{v}, \bar{v}]$. La fonction de distribution de $\max_{i \in I} \tilde{v}^i$ étant F^I ,

$$\Psi(I) = \int_{\underline{v}}^{\bar{v}} \int_{\underline{v}}^x (x - y) dF^{|N|-|I|}(y) dF^{|I|}(x)$$

En intégrant par parties,

$$\Psi(I) = \int_{\underline{v}}^{\bar{v}} (1 - F^{|I|}(x)) F^{|N|-|I|}(x) dx$$

En particulier, si les v.a. sont uniformes sur $[0, 1]$,

$$\Psi(I) = \frac{|I|}{(|N| + 1)(|N| - |I| + 1)} \quad \blacksquare$$

Exemple 2: L'exemple 1 permet d'en construire toute une série d'autres, dans lesquels les enchérisseurs ne sont plus semblables, en considérant des individus i dont l'évaluation $\tilde{v}^i$ est distribuée comme $\max_{j \in J} \tilde{v}^j$, pour un ensemble J donné. A titre d'illustration, prenons $N = \{1, 2, 3\}$, $\tilde{v}^1, \tilde{v}^2$ uniformes sur $[0, 60]$ et $\tilde{v}^3$ distribuée comme le maximum de deux uniformes indépendantes sur $[0, 60]$:

$$\Psi(\{i\}) = 3, \Psi(\{3\}) = \Psi(\{1, 2\}) = 8, \Psi(\{i, 3\}) = 18, \Psi(N) = 48, i = 1, 2 \quad \blacksquare$$

Exemple 3: L'information complète ($\tilde{v}^i =_{p.s.} v^i$) constitue un cas extrême de notre modèle. Pour $N = \{1, 2, 3\}$ et $v^3 < v^2 < v^1$,

$$\Psi(\{1\}) = \Psi(\{1, 3\}) = v^1 - v^2, \Psi(\{1, 2\}) = v^1 - v^3, \Psi(N) = v^1, \Psi(I) = 0 \text{ si } 1 \notin I$$

Nous développerons cet exemple dans la section 5. $\blacksquare$

Graham, Marshall et Richard (1990) utilisent la fonction caractéristique Ψ ci-dessus mais ne la justifient rigoureusement que dans le cas de l'information complète (voir leurs équations (2) et (3) ainsi que les commentaires faisant suite au théorème 6, p. 504-505).

Mailath et Zemsky (1991) ont introduit les mécanismes de collusion (δ_I, μ_I) que nous avons exploités ci-dessus. Ils obtiennent (p. 480) une fonction caractéristique Φ , différente de Ψ , en maximisant le *surplus ex ante* que procure la collusion au cartel, par rapport au jeu non-coopératif standard. Dans ce dernier, l'utilité espérée *ex ante* NC^i de l'agent i , à l'équilibre en stratégies dominantes, est

$$NC^i = \Psi(\{i\}) = E \left[(\tilde{v}^i - \max_{j \neq i} \tilde{v}^j)^+ \right] \quad (7)$$

de sorte que

$$\Phi(I) = \Psi(I) - \sum_{i \in I} NC^i \quad (8)$$

Mailath et Zemsky (1991) n'insistent pas d'emblée sur le choix *ex ante* du mécanisme et imposent en particulier les conditions de participation suivantes, pour chaque membre du cartel à l'étape *interim* (voir (3), (4)):

$$U^i(\delta_I, \mu_I \mid v^i) \geq NC^i(v^i) =_{\text{déf}} E \left[(v^i - \max_{j \neq i} \tilde{v}^j)^+ \right] \quad \forall i \in I, v^i \in V^i$$

Si on prend au sérieux le jeu coopératif décrit par Ψ (ou Φ), on doit imposer les mêmes contraintes de participation aux individus qu'aux coalitions, c'est-à-dire celles qui sont prises en compte par le concept de solution appliqué (cœur, valeur de Shapley,...) et qui s'expriment nécessairement en termes des utilités espérées *ex ante* qui définissent Ψ (ou Φ).¹⁰

Le mécanisme (δ_I^*, μ_I^*) que nous avons construit pour calculer $\Psi(I)$ correspond à un choix particulier de transferts *ex ante* dans le théorème 4 de Mailath et Zemsky (1991), qui n'utilisent cependant pas les techniques de Groves (1973) et d'Aspremont et Gérard-Varet (1979), mais partent d'une caractérisation des mécanismes incitatifs (théorème 1). Ils n'aboutissent néanmoins (dans les théorèmes 3 et 4), au prix d'une construction assez com-

¹⁰Ce qui ne contredit évidemment pas l'intérêt d'une analyse des contraintes de participation des coalitions à l'étape *interim* (voir par exemple Vohra (1999)).

pliquée, qu'à l'identification d'une classe de mécanismes incitatifs et efficaces *ex post*.¹¹

4 Stabilité des cartels

Dans cette section, nous appliquons un concept de solution classique, le cœur, au jeu coopératif défini par la fonction caractéristique Ψ de la proposition 1. Notre tâche est rendue aisée par la propriété suivante:

Proposition 2 *La fonction caractéristique Ψ est surmodulaire, c'est-à-dire*

$$\Psi(I \cup J) + \Psi(I \cap J) \geq \Psi(I) + \Psi(J) \text{ pour toutes coalitions } I, J \quad (9)$$

Démonstration: Suivant Shapley (1971) (voir également Moulin (1988)), il est équivalent de montrer que

$$\Psi(I \cup \{k\}) - \Psi(I) \geq \Psi(J \cup \{k\}) - \Psi(J) \quad \forall J \subseteq I, k \in N \setminus I \quad (10)$$

Fixons une réalisation des évaluations, soit v^i , $i = 1, \dots, n$, que nous pouvons supposer distinctes deux à deux, et posons

$$f(I) = \left(\max_{i \in I} v^i - \max_{j \in N \setminus I} v^j \right)^+ \quad (11)$$

Il suffit de vérifier que f est surmodulaire, c'est-à-dire satisfait (10).¹² Considérons la fonction caractéristique γ définie $\gamma(I) = \max_{i \in I} v^i$, typiquement associée aux problèmes de partage de coûts (voir Littlechild et Owen (1973) ou, par exemple, Moulin (1988)). γ est sous-modulaire (c'est-à-dire satisfait (9) ou (10) avec l'inégalité opposée), tandis que les contributions marginales de f et γ sont reliées l'une à l'autre par la formule suivante:

$$f(I \cup \{k\}) - f(I) = \gamma(N \setminus I) - \gamma((N \setminus I) \setminus \{k\}) \quad \forall I \subset N, k \notin I \quad (12)$$

■

¹¹Un sous-produit de l'analyse de Mailath et Zemsky (1992) mérite d'être mentionné, même si nous ne l'utilisons pas. Soit (δ_I, μ_I) un mécanisme de collusion incitatif et efficace *ex post*. L'utilité *interim* nette d'un agent i , $U^i(\delta_N, \mu_N \mid v^i) - NC^i(v^i)$, dépend de i , mais est indépendante de v^i (voir aussi Krishna (2002, chapitre 11)).

¹² f correspond à la fonction caractéristique en information complète. Graham, Marshall et Richard (1990) observent (note 11) que le jeu est convexe dans ce cas.

Afin d'étudier la stabilité d'un cartel donné I , nous considérons le jeu coopératif restreint à I :

$$\Psi_I(J) = \Psi(J) \quad \forall J \subseteq I$$

Nous désignons par $C(I, \Psi) \subseteq \mathbb{R}^I$ le cœur du jeu Ψ_I . $C(I, \Psi)$ correspond au cœur *ex ante* incitatif défini par exemple dans Forges (1999) et Forges, Mertens et Vohra (2002). Si $C(I, \Psi) \neq \emptyset$, aucun sous-cartel $J \subseteq I$ n'a intérêt à se désolidariser de I , ce qui indique une forme de stabilité ("interne") de I .¹³ D'après la proposition 2, Ψ_I est surmodulaire, ce qui garantit la non-vacuité de $C(I, \Psi)$ (qui contient par exemple la valeur de Shapley de Ψ_I , voir Shapley (1971)). On peut donc énoncer la proposition qui suit:

Proposition 3 *Tous les cartels sont ex ante stables, au sens où le cœur ex ante incitatif $C(I, \Psi)$ est non-vide, quel que soit le cartel I .*

Mailath et Zemsky (1992, théorème 8 et note 15) établissent un résultat analogue en vérifiant que leur jeu Φ (voir (8)) est "balancé" au sens de Bondareva et Shapley (voir Bondareva (1963), Shapley (1967))¹⁴. Ils remarquent aussi (théorème 5) que l'intégration d'un enchérisseur supplémentaire $k \notin I$ (tel que $\bar{v}^k > \max_{j \notin I} v_j$) est de nature à améliorer le sort du cartel. Ils proposent que $I \cup \{k\}$ se forme et que le surplus dégagé par l'arrivée de k améliore strictement la part des membres de I , sans se soucier de la stabilité de $I \cup \{k\}$. Retournons à l'exemple 3 et partons de $I = \{3\}$: $\Psi(I) = 0$; l'intégration de l'agent 1 améliore considérablement le sort du cartel: $\Psi(\{1, 3\}) = v^1 - v^2$, mais comme $C(\{1, 3\}, \Psi) = \{(v^1 - v^2, 0)\}$, il est impossible de faire bénéficier l'agent 3 de l'arrivée de l'agent 1 en garantissant la stabilité du nouveau cartel. Il n'en demeure pas moins vrai que la stabilité "externe" des cartels est extrêmement fragile dans notre modèle:

Proposition 4 *Soit $I \subset N$, $x \in C(I, \Psi)$ et $k \notin I$; $(x, \Psi(I \cup \{k\}) - \Psi(I)) \in C(I \cup \{k\}, \Psi)$. En d'autres termes, un cartel stable peut accueillir un membre supplémentaire sans modifier la part de ses membres initiaux, tout en maintenant sa stabilité.*

¹³Une fois de plus, notre approche se justifie par les effets d'externalité limités de notre modèle: si J se désolidarise de I , l'utilité espérée *ex ante* de J peut être raisonnablement évaluée comme $\Psi(J)$, sans qu'on doive faire de conjecture sur la structure des coalitions au sein de $N \setminus J = (I \setminus J) \cup (N \setminus I)$.

¹⁴Mailath et Zemsky (1992) ont donc considéré un exemple de cœur *ex ante* incitatif avant que ce concept de solution ne soit développé pour les économies d'échange.

Démonstration: On n'utilise que la surmodularité de Ψ . Il est clair que $(x, \Psi(I \cup \{k\}) - \Psi(I))$ est efficace pour $I \cup \{k\}$ et qu'aucune coalition $J \subseteq I$ n'a intérêt à se désolidariser. Soit donc une coalition contenant k , de la forme $J \cup \{k\}$, avec $J \subseteq I$:

$$\sum_{j \in J} x^j + \Psi(I \cup \{k\}) - \Psi(I) \geq \Psi(J \cup \{k\})$$

puisque $x \in C(I, \Psi)$ et que Ψ satisfait (10). ■

L'exemple ci-dessus montre que, partant de $x \in C(I, \Psi)$, il n'y a pas toujours moyen de construire une allocation y dans $C(I \cup \{k\}, \Psi)$ qui améliore strictement la part des membres de I , c'est-à-dire telle que $y^i > x^i, i \in I$. Mais une telle amélioration est souvent accessible.

Les propositions 3 et 4 plaident clairement en faveur de la formation du plus grand cartel possible, c'est-à-dire N . En pratique, d'autres facteurs que la stabilité, comme par exemple les affinités des agents, expliquent le maintien de petits cartels.

5 Evaluation du pouvoir des membres d'un cartel

Nous passons à un autre concept de solution classique en étudiant les propriétés de la valeur de Shapley des jeux Ψ_I , qu'on pourrait qualifier d' "*ex ante* incitative"; nous la notons $Sh(I, \Psi)$. Pour chacun des membres i du cartel I , $Sh^i(I, \Psi)$ s'interprète traditionnellement comme une mesure du pouvoir de i au sein de ce cartel. Comme on l'a signalé déjà, la surmodularité de Ψ garantit que $Sh(I, \Psi) \in C(I, \Psi)$; $Sh(I, \Psi)$ constitue donc une répartition stable de l'utilité espérée *ex ante* du cartel. Graham, Marshall et Richard (1990) caractérisent la valeur de Shapley dans le cadre de l'information complète. Nous retrouvons leur résultat par une méthode différente de la leur, en nous rappelant l'expression de la valeur de Shapley comme solution d'un problème de partage de coûts.

Exemple 3 (suite): Si les n enchérisseurs connaissent parfaitement leurs évaluations respectives $v^n < \dots < v^2 < v^1$, la fonction caractéristique prend la forme de f , définie en (11). Pour alléger les notations, nous décrirons la valeur

de Shapley du jeu de base c'est-à-dire $Sh(N, f)$. Considérons l'allocation $x = (x^i)_{i \in N}$ définie par

$$\begin{aligned} x^n &= \frac{v^n}{n} \\ x^i &= x^{i+1} + \frac{v^i - v^{i+1}}{i} \quad i = n-1, \dots, 1 \end{aligned}$$

Nous allons vérifier que

$$Sh(N, f) = x$$

Tout d'abord, on sait que $x = Sh(N, \gamma)$, pour la fonction caractéristique γ associée aux problèmes de partage de coûts, $\gamma(I) = \max_{i \in I} v^i$ (voir Littlechild et Owen (1973) ou, par exemple, Moulin (1988)). D'autre part, comme on l'a vu dans la démonstration de la proposition 2, les contributions marginales de f et γ sont liées par (12), d'où on déduit immédiatement que $Sh(N, f) = Sh(N, \gamma)$.

Partant de cette caractérisation, Graham, Marshall et Richard (1990) montrent que $Sh(N, f)$ correspond à une répartition de $f(N) = v^1$ entre les membres de N par une procédure d'enchères au second prix successives, que nous décrivons brièvement.

Etape 1: $C_1 = N = \{1, \dots, n\}$ acquiert l'objet au prix 0 au cours de l'enchère originelle.

Etape 2: C_1 organise une enchère au second prix; $C_2 = \{1, \dots, n-1\}$ forme un cartel contre n , et emporte l'objet au prix v^n ; C_2 paie ce montant à C_1 , qui le répartit uniformément entre ses membres; chaque $i \in C_1$ reçoit donc $\frac{v^n}{n}$.

Etape 3: C_2 organise une enchère au second prix; $C_3 = \{1, \dots, n-2\}$ forme un cartel contre $n-1$, et emporte l'objet au prix v^{n-1} ; C_3 paie ce montant à C_2 , qui dégage ainsi un surplus de $v^{n-1} - v^n$; C_2 répartit uniformément ce surplus entre ses membres qui reçoivent donc chacun $\frac{v^{n-1} - v^n}{n-1}$.

...

Etape n : $C_{n-1} = \{1, 2\}$ a acquis l'objet au prix v^3 à l'étape précédente; 1 emporte l'objet au prix v^2 dans une enchère au second prix qui l'oppose à 2; 1 et 2 se partagent également le bénéfice $v^2 - v^3$, tandis que 1, qui conserve l'objet, a de plus $v^1 - v^2$.

Exploitions encore le modèle simple de l'information complète pour comprendre dans quelle mesure les agents ont intérêt à former des cartels de grande taille. Selon la proposition 4, partant d'une allocation stable, un cartel peut s'étendre de façon stable sans diminuer la part de ses membres initiaux pour autant que l'allocation du cartel étendu soit choisie judicieusement. Mais cette propriété n'empêche évidemment pas qu'un agent puisse être mieux traité dans l'allocation stable d'un petit cartel que dans l'allocation stable d'un plus grand. A titre d'illustration, pour les valeurs $v^3 = 3$, $v^2 = 7$, $v^1 = 12$, empruntées à Graham, Marshall et Richard (1990), $(9, 0) \in C(\{1, 2\}, f)$, tandis que $Sh(f) = (8, 3, 1) \in C(\{1, 2, 3\}, f)$. Cependant, si on s'en tient à la valeur de Shapley, on trouve $Sh(\{1, 2\}, f) = (7, 2)$: l'agent 1 et l'agent 2 préfèrent tous deux la répartition associée à la grande coalition; quant à l'agent 3, il se trouve également mieux dans la grande coalition que seul. Cette propriété de monotonie de la valeur de Shapley est en fait générale, comme nous le précisons ci-dessous. ■

Nous revenons à l'information incomplète, c'est-à-dire à la valeur de Shapley *ex ante* incitative introduite au début de cette section.

Proposition 5 *Soit $I \subset N$, $i \in I$ et $k \notin I$; $Sh^i(I \cup \{k\}, \Psi) \geq Sh^i(I, \Psi) \forall i \in I$ et $Sh^k(I \cup \{k\}, \Psi) \geq \Psi(\{k\})$. En d'autres termes, le pouvoir des agents, mesuré par la valeur de Shapley, croît avec la taille du cartel dont ils font partie.*

Cette propriété est juste une illustration de la “monotonie en population”, qui est satisfaite par la valeur de Shapley dans tout jeu surmodulaire (voir Moulin (1988)). Elle généralise le théorème 7 de Mailath et Zemsky (1991), selon lequel $\frac{\Phi(I)}{|I|}$ (voir (8)) croît avec $|I|$ lorsque les agents sont semblables, c'est-à-dire lorsque les évaluations $\tilde{v}^i$ sont i.i.d. En effet, dans ce cas, par symétrie, $Sh^i(I, \Psi) = \frac{\Psi(I)}{|I|} \forall i \in I$ et NC^i (voir (7)) est également indépendant de i , de sorte que $\frac{\Phi(I)}{|I|}$ et $\frac{\Psi(I)}{|I|}$ ne diffèrent que par une constante.

Comme on l'a mentionné dans la section 3, Graham, Marshall et Richard (1990) ont conçu un mécanisme de pré-enchère dont les transferts sont balancés *ex ante*. Ils montrent que, pour un choix judicieux de ces transferts, $Sh(I, \Psi)$ correspond au paiement *ex ante* des membres du cartel I .

6 Extension des résultats

Tout au long de cet article, on s’est limité à des enchérisseurs dont les évaluations étaient purement subjectives. Sans modifier la procédure des enchères, qui se dérouleront toujours sous pli scellé au second prix, nous envisageons brièvement le cas où la valeur de l’objet est la même pour tous les acheteurs potentiels. Soit $\tilde{v}$ la v.a. représentant cette valeur commune. Chaque agent $i = 1, \dots, n$ dispose d’information privée, représentée par la réalisation s^i d’un signal aléatoire $\tilde{s}^i$ corrélé à $\tilde{v}$.

Dans ce modèle, la collusion permet non seulement de réduire la concurrence, mais aussi d’améliorer la précision de l’information, en fusionnant différents signaux.¹⁵ Cependant, même en l’absence de tout cartel, les enchérisseurs n’ont en général plus de stratégie dominante. En particulier, un cartel subit au moins deux types d’externalités de la part des agents qui ne font pas partie du cartel, qui tiennent au regroupement en sous-coalitions mais aussi aux stratégies adoptées par celles-ci. Si on parvient à caractériser un comportement d’équilibre bien défini pour chaque structure de coalitions, on fait face, non plus à un jeu décrit par une fonction caractéristique, comme dans la section 3, mais à un jeu sous forme “partitionnelle” (Thrall et Lucas (1963)), dont les solutions sont encore en plein développement (voir par exemple Maskin (2003), de Clippel et Serrano (2006), Hafalir (2006)). Seule la question des incitations apparaît plus simple que dans le cas des évaluations subjectives: le signal s^i constitue raisonnablement une information *vérifiable* de l’agent i , de sorte qu’on peut, dans un premier temps, oublier les contraintes d’incitation et s’en tenir à l’optimum de premier rang du cartel.

Nous nous limiterons à l’analyse de deux exemples. Le premier illustre la forme partitionnelle qui résulte des externalités, mais la stabilité des cartels y est garantie. Cette propriété n’est plus vérifiée dans le second exemple.

Exemple 4: On suppose qu’il y a 3 enchérisseurs ($n = 3$), dont les signaux $\tilde{s}^i$ ($i = 1, 2, 3$) sont i.i.d., uniformes sur $[0, 1]$, et que la valeur commune de l’objet est de la forme $\tilde{v} = \frac{1}{3}(\tilde{s}^1 + \tilde{s}^2 + \tilde{s}^3)$ (voir par exemple Mares et Shor (2003)). Comme précédemment, le prix de réserve du vendeur est nul.

¹⁵La collusion dans le modèle des valeurs communes peut préserver l’avantage des enchérisseurs les mieux informés, qui souffriraient d’être mis en concurrence, mais aussi permettre aux enchérisseurs les moins informés de rivaliser avec les mieux informés; dans ce dernier cas, la collusion peut être favorable au vendeur (voir Marshall et Meurer (2001) pour quelques exemples).

Soit $I \subseteq N = \{1, 2, 3\}$ un cartel; on se propose de déterminer, pour chaque partition Π de N dont I est un atome, le profit *de premier rang* $\Lambda(I; \Pi)$ de I dans la configuration Π , *pour un comportement d'équilibre privilégié* des atomes de Π . En effet, comme nous allons le voir ci-après, en valeurs communes, on ne peut évaluer le profit d'un cartel I sans tenir compte de la manière dont les agents de $N \setminus I$ prennent leurs décisions (en particulier, se regroupent). Par symétrie, nous pouvons nous limiter à quelques cas.

1. $|I| = 3$, i.e., $I = N = \{1, 2, 3\}$: la seule partition à considérer est $\Pi = \{\{1, 2, 3\}\}$; si la “grande coalition” se constitue en cartel, elle acquiert l'objet à prix nul, de sorte que

$$\Lambda(\{1, 2, 3\}; \{1, 2, 3\}) = E[\tilde{v}] = E\left[\frac{1}{3}(\tilde{s}^1 + \tilde{s}^2 + \tilde{s}^3)\right] = \frac{1}{2}$$

2. $|I| = 2$, par exemple, $I = \{1, 2\}$: à nouveau, il n'y a qu'une seule partition à considérer, $\Pi = \{\{1, 2\}, \{3\}\}$. Nous faisons face à une enchère au second prix, entre $\{1, 2\}$, qui dispose de la paire de signaux $(\tilde{s}^1, \tilde{s}^2)$ et 3, qui a observé le signal $\tilde{s}^3$. Une stratégie non-dominée¹⁶ de $\{1, 2\}$ (resp., 3) est une fonction $\beta_{12} : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ (resp., $\beta^3 : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$)¹⁷. On suppose β^3 strictement croissante et dérivable; soit φ^3 son inverse. Etant donné β^3 (ou, de façon équivalente φ^3) et une réalisation (s^1, s^2) , une offre b_{12} de $\{1, 2\}$ maximise son profit si

$$b_{12} = \frac{1}{3}[s^1 + s^2 + \varphi^3(b_{12})] = \frac{1}{3}[2\bar{s}_{12} + \varphi^3(b_{12})] \quad (13)$$

où $\bar{s}_{12} = \frac{1}{2}(s^1 + s^2)$. L'agent 3 peut donc raisonnablement supposer que l'offre de $\{1, 2\}$ ne dépend que de $\bar{s}_{12}$. On note encore β_{12} la stratégie de $\{1, 2\}$ définie sur son signal moyen, et on suppose β_{12} strictement croissante et dérivable; soit $\varphi_{12} = \beta_{12}^{-1}$. L'analogue de (13) pour l'agent 3 est

$$b^3 = \frac{1}{3}(2\varphi_{12}(b^3) + s^3) \quad (14)$$

On remarque immédiatement que $b_{12} = \beta_{12}(\bar{s}_{12}) = \bar{s}_{12}$ et $b^3 = \beta^3(s^3) = s^3$, c'est-à-dire les stratégies consistant à faire tout simplement une offre

¹⁶Un enchérisseur ne peut diminuer son profit espéré en remplaçant une offre strictement supérieure à 1 par une offre égale à 1.

¹⁷Nous maintenons les conventions suivies dans les sections précédentes en faisant référence à un individu par un indice supérieur et à une coalition par un indice inférieur.

égale à son signal, sont solution de (13) et (14). On peut vérifier que c'est la seule solution *linéaire*, c'est-à-dire de la forme $\beta_{12}(\bar{s}_{12}) = k_{12}\bar{s}_{12}$, $\beta^3(s^3) = k^3 s^3$, $k_{12}, k^3 \in \mathbb{R}$. En ce sens, ces stratégies forment un équilibre *privilegié*. On peut maintenant calculer le profit espéré du cartel $\{1, 2\}$ à cet équilibre:

$$\begin{aligned}\Lambda(\{1, 2\}; \{1, 2\}, \{3\}) &= E \left[(\tilde{v} - \tilde{s}^3) I\left[\frac{1}{2}(\tilde{s}^1 + \tilde{s}^2) \geq \tilde{s}^3\right] \right] \\ &= E \left[\frac{2}{3}(\overline{\tilde{s}_{12}} - \tilde{s}^3) I[\overline{\tilde{s}_{12}} \geq \tilde{s}^3] \right] = \frac{7}{72}\end{aligned}$$

en posant $\overline{\tilde{s}_{12}} = \frac{1}{2}(\tilde{s}^1 + \tilde{s}^2)$.

3. $|I| = 1$, par exemple, $I = \{1\}$. Deux configurations doivent être envisagées: $\Pi = \{\{1\}, \{2, 3\}\}$ et $\Pi = \{\{1\}, \{2\}, \{3\}\}$. Dans le premier cas, le profit de l'agent 1 (face à $\{2, 3\}$) peut se calculer comme celui de l'agent 3 (face à $\{1, 2\}$) dans l'équilibre mis en évidence au point précédent:

$$\begin{aligned}\Lambda(\{1\}; \{1\}, \{2, 3\}) &= E \left[(\tilde{v} - \overline{\tilde{s}_{23}}) I[\tilde{s}^1 \geq \overline{\tilde{s}_{23}}] \right] \\ &= \frac{1}{3} E \left[(\overline{\tilde{s}_{23}} - \tilde{s}^1) I[\overline{\tilde{s}_{23}} \geq \tilde{s}^1] \right] = \frac{7}{144}\end{aligned}$$

Dans le second cas, les trois agents jouent indépendamment, et les profits sont raisonnablement évalués à l'équilibre symétrique standard (voir par exemple Milgrom et Weber (1982)). La stratégie d'équilibre de l'agent 1 est ici

$$\beta^1(s^1) = v(s^1, s^1) = E \left[\tilde{v} | \tilde{s}^1 = s^1, \max(\tilde{s}^2, \tilde{s}^3) = s^1 \right] = \frac{5}{6} s^1$$

de sorte que

$$\Lambda(\{1\}; \{1\}, \{2\}, \{3\}) = E \left[\left[\tilde{v} - \frac{5}{6} \max(\tilde{s}^2, \tilde{s}^3) \right] I[\tilde{s}^1 \geq \max(\tilde{s}^2, \tilde{s}^3)] \right] = \frac{1}{36}$$

On remarque que le cartel $\{2, 3\}$ exerce une externalité positive sur l'agent 1, qui bénéficie de la collusion des deux autres agents ($\frac{7}{144} > \frac{1}{36}$). La forme partitionnelle Λ calculée ci-dessus fait apparaître l'avantage de la grande

coalition N . Une répartition symétrique de son profit entre ses membres, $(\frac{1}{6}, \frac{1}{6}, \frac{1}{6})$, sera stable, car elle ne pourra être améliorée par aucune coalition, *quelle que soit la configuration anticipée par celle-ci*: Λ est suradditive, $\Lambda(\{1, 2\}; \{1, 2\}, \{3\}) = \frac{7}{72} < \frac{1}{3}$, $\Lambda(\{1\}; \{1\}, \{2, 3\}) = \frac{7}{144} < \frac{1}{6}$. ■

Exemple 5: On considère à nouveau 3 enchérisseurs; le signal $\tilde{s}^i$ de l'agent i ($i = 1, 2, 3$) peut prendre trois valeurs strictement positives: $b < m < h$. Les signaux des agents sont corrélés entre eux: soit ils sont tous les trois différents et la valeur de l'objet est 0, soit ils sont tous les trois identiques ($s^1 = s^2 = s^3 = s$) et la valeur de l'objet est cette valeur commune (s). On suppose que chaque configuration du triplet de signaux a la même probabilité ($\frac{1}{9}$).¹⁸ Il est clair que le cartel formé des trois enchérisseurs peut déterminer la vraie valeur de l'objet et faire un profit espéré *ex ante* positif correspondant à la valeur espérée de cet objet ($\frac{1}{9}(b + m + h)$). De même, un cartel formé de deux enchérisseurs peut lui aussi déterminer la vraie valeur de l'objet, tandis que l'enchérisseur laissé seul a une *information inférieure* au cartel. D'après Einy et al. (2001), le cartel a une stratégie dominante, consistant à faire une offre égale à la vraie valeur de l'objet, contre laquelle l'enchérisseur isolé ne peut rien gagner; à l'équilibre privilégié dans lequel l'enchérisseur isolé fait une offre nulle, le cartel fait un profit espéré *ex ante* aussi élevé que celui de la grande coalition. Ceci suffit à montrer que le cœur est vide. ■

L'exemple 4 montre que, même si la théorie des jeux sous forme partitionnelle est un outil prometteur, l'application de la méthode des sections 2-5 en dehors du cadre des valeurs purement subjectives est compromise par les problèmes posés par les équilibres de Nash dans les jeux d'enchères non-coopératifs, typiquement non-symétriques, qui opposent les différents cartels: existence, caractérisation, multiplicité, etc. On est ainsi conduit à identifier des équilibres "privilégiés", i.e., satisfaisant des restrictions discutables. Si les valeurs sont privées et indépendantes et que l'enchère soit sous pli scellé au second prix, les stratégies sincères constituent le seul équilibre en stratégies non-dominées, un critère de sélection qui ne paraît pas sujet à controverse (voir néanmoins Blume et Heidhues (2004) pour une caractérisation complète

¹⁸Par exemple, chaque enchérisseur obtient son signal d'un expert qui lui est attaché, mais les trois experts se consultent à l'insu des enchérisseurs. Si leurs signaux sont tous différents, les experts transmettent leur signal initial. Mais dès qu'une majorité se dégage, ils transmettent tous les trois le même signal. Dans ce cas, le rapport des experts est utile, et rend compte de la valeur de l'objet. Des signaux divergents des experts révèlent une valeur médiocre.

des équilibres). Des difficultés semblables sont susceptibles de se poser si on s'en tient aux valeurs purement subjectives mais qu'on considère l'enchère sous pli scellé *au premier prix*.

7 Références

- d'Aspremont, C. et L.-A. Gérard-Varet (1979), "Incentives and incomplete information", *Journal of Public Economics* 11, 25–45.
- d'Aspremont, C. et L.-A. Gérard-Varet (1982), "Bayesian incentive compatible beliefs", *Journal of Mathematical Economics* 10, 83–103.
- d'Aspremont, C., J. Crémer and L.-A. Gérard-Varet (1992), "Mécanismes bayésiens incitatifs: un survol informel de quelques résultats récents", *Annales d'Économie et de Statistique* 25/26, 151–164.
- Blume, A. et P. Heidhues (2004), "All equilibria of the Vickrey auction", *Journal of Economic Theory* 114, 170–177.
- Bondareva, O. (1963), "Certaines applications des méthodes de la programmation linéaire à la théorie des jeux coopératifs", *Problemy Kibernet.* 10, 119–139. [en russe]
- Caillaud, B. et P. Jehiel (1998), "Collusion in auctions with externalities", *RAND Journal of Economics* 29, 680–702.
- de Clippel, G. et R. Serrano (2006), "Marginal Contributions and Externalities in the Value", mimeo, Brown University.
- Chen, C-L, et Y. Tauman (2006), "Collusion in one-shot second-price auctions", *Economic Theory* 145–172.
- Clarke, E. (1971), "Multipart pricing of public goods", *Public Choice* 2, 19–33.
- Crémer, J. (1996), "Manipulation by Coalition Under Asymmetric Information: The Case of Groves, Mechanisms", *Games and Economic Behavior* 13, 39–73.

- Einy, E., O. Haimanko, R. Orzach et A. Sela (2001), “Dominant strategies, superior information, and winner’s curse in second-prices auctions”, *International Journal of Game Theory* 30, 405-419.
- Forges, F. (1999), “Le cœur ex ante incitatif d’une économie d’échange en information asymétrique”, *Revue Economique* 50, 571-581.
- Forges, F., J.-F. Mertens et R. Vohra (2002), “The Ex Ante Incentive Compatible Core in the Absence of Wealth Effects”, *Econometrica* 70, 1865-1892.
- Graham D., et R. Marshall (1987), “Collusive behavior at single-object second-price and English auctions”, *Journal of Political Economy* 95, 1217-1239.
- Graham D., R. Marshall et J.-F. Richard (1990), “Differential payments within a bidder coalition and the Shapley value”, *American Economic Review* 80, 493-510.
- Groves, T. (1973), “Incentives in teams”, *Econometrica* 41, 617–631.
- Hafalir, I. (2006), “Efficiency in coalition games with externalities”, mimeo, Penn State University.
- Klemperer, P. (2004), *Auctions: Theory and Practice*, Princeton University Press.
- Krishna, V. (2002), *Auction Theory*, Academic Press.
- Littlechild, S. et G. Owen (1973), “A simple expression for the Shapley value in a special case”, *Management Science* 20, 370-372.
- Mailath, G. et P. Zemsky (1991), “Collusion in second price auctions with heterogeneous bidders”, *Games and Economic Behavior* 3, 467-486.
- Mares, V. et M. Shor (2003), “Industry concentration in common value auctions: theory and evidence”, mimeo, Washington University, St. Louis.
- Marshall, R. et M. Meurer (2001), “The economics of auctions and bidder collusion”, in Chatterjee, K et W. Samuelson (eds), *Game Theory and Business Applications*, Kluwer Academic Publishers, 339-370.

- Maskin, E. (2003), “Bargaining, Coalitions, and Externalities”, mimeo, Princeton University.
- Milgrom, P. (2004), *Putting Auction Theory to Work*, Cambridge University Press.
- Milgrom et Weber (1982), “A theory of auctions and competitive bidding”, *Econometrica* 50, 1089-1122.
- Moulin (1988), *Axioms of Cooperative Decision Making*, Cambridge University Press.
- Shapley, L. (1967), “On balanced sets and cores”, *Naval Research Logistics Quarterly* 14, 453-460.
- Shapley (1971), “Core of convex games”, *International Journal of Game Theory* 1, 11-26.
- Thrall, R. et W. Lucas (1963), “n-Person Games in Partition Function Form”, *Naval Research Logistics Quarterly* 10, 281-298.
- Vickrey, W. (1961), “Counterspeculation, auctions and competitive sealed tenders”, *Journal of Finance* 16, 8-37.
- Vohra, R. (1999), “Incomplete information, incentive compatibility and the core”, *Journal of Economic Theory* 86, 123–147.