Grandes déviations pour une équation différentielle stochastique rétrograde à horizon aléatoire. Application à l'étude d'une EDP elliptique semi-linéaire

Sophie RAINERO
CEREMADE, Université Paris-Dauphine
Pl. du M^{al} de Lattre de Tassigny
75775 Paris Cedex 16, France
rainero@ceremade.dauphine.fr

26 avril 2006

Résumé

On considère des équations différentielles stochastiques rétrogrades (EDSR) à horizon aléatoire, basées sur une famille de processus de Markov dont le coefficient de diffusion tend vers 0. On montre un principe de grandes déviations pour les solutions de ces EDSR, et on applique ce résultat à l'étude d'une équation aux dérivées partielles elliptique semi-linéaire.

Abstract

Large deviations for a BSDE with random terminal time. Application to the study of an elliptic semi-linear PDE. We consider backward stochastic differential equations (BSDE) with random terminal time, associated to a family of Markov processes, the diffusion coefficient of which tends to 0. We prove a large deviation principle for the solutions of these BSDE and we apply this result to the study of an elliptic semi linear partial differential equation.

Introduction

Nous nous intéressons ici à une équation différentielle stochastique rétrograde (EDSR) dont le temps terminal, aléatoire, est le temps de sortie d'un domaine D d'une diffusion donnée ; plus précisément, on considère le système d'équations stochastiques suivant :

$$\begin{aligned} X_t^{\varepsilon,x} &= x + \int_0^t \beta(X_s^{\varepsilon,x}) ds + \varepsilon \int_0^t \sigma(X_s^{\varepsilon,x}) dB_s, \quad t \geq 0 \\ Y_t^{\varepsilon,x} &= g(X_{\tau^{\varepsilon,x}}^{\varepsilon,x}) + \int_{t \wedge \tau^{\varepsilon,x}}^{\tau^{\varepsilon,x}} f(X_s^{\varepsilon,x}, Y_s^{\varepsilon,x}, Z_s^{\varepsilon,x}) ds - \int_{t \wedge \tau^{\varepsilon,x}}^{\tau^{\varepsilon,x}} Z_s^{\varepsilon,x} dB_s, \quad t \geq 0 \end{aligned}$$

où

$$\tau^{\varepsilon,x} := \inf\{t \geq 0 : X_t^{\varepsilon,x} \in \partial D\}, \quad x \in \bar{D}$$

Soit $x \in D$. Depuis les travaux de Freidlin et Wentzell, il est classique que la solution $X^{\varepsilon,x} = (X_t^{\varepsilon,x})_{t \geq 0}$ de l'équation directe converge, quand ε tend vers 0, vers la fonction φ^x solution de l'équation déterministe $\varphi'_t = \beta(\varphi_t)$, $\varphi_0 = x$, en vérifiant un principe de grandes déviations. Sous certaines hypothèses sur cette équation différentielle, en particulier l'existence d'un point d'équilibre stable x^* unique appartenant à D , le temps de sortie $\tau^{\varepsilon,x}$ tend vers l'infini quand ε tend vers 0, et si de plus il y a un minimum de quasi-potentiel unique z^* sur le bord de D , on sait que le point de sortie de la diffusion, $X_{\tau^{\varepsilon,x}}^{\varepsilon,x}$, converge vers z^* .

Sous ces hypothèses, on montre ici la convergence, quand ε tend vers 0, de la solution rétrograde $Y^{\varepsilon,x} = (Y_t^{\varepsilon,x})_{t \geq 0}$ vers une application déterministe ψ^x , solution de :

$$\psi_t = g(z^*) + \int_t^\infty f(\varphi_s^x, \psi_s, 0) ds, \quad t \geq 0$$

en vérifiant un principe de grandes déviations.

Nous appliquons ce résultat à la convergence, quand ε tend vers 0, de la solution de viscosité u^ε de l'équation aux dérivées partielles (EDP) :

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^{\varepsilon,x} u^\varepsilon(x) + f(x, u^\varepsilon(x), \varepsilon \nabla u^\varepsilon(x) \sigma(x)) &= 0, & x \in D \\ u^\varepsilon(x) &= g(x), & x \in \partial D \end{aligned}$$

où $\mathcal{L}^{\varepsilon,x}$ désigne le générateur infinitésimal de la diffusion $X^{\varepsilon,x}$, vers la fonction u définie par $u(x) = \psi_0^x$, et qui sous certaines hypothèses est l'unique solution classique dans D du problème :

$$\begin{aligned} \langle \beta(x), \nabla u(x) \rangle + f(x, u(x), 0) &= 0, & x \in D \\ u(x^*) &= g(z^*) \end{aligned}$$

où $x^* \in D$ est le point d'équilibre stable associé au système dynamique non perturbé, solution de $\varphi'_t = \beta(\varphi_t)$, z^* étant l'unique point du bord de D qui réalise le minimum du quasi-potentiel. Nous terminerons cet article par l'étude de la convergence de l'EDSR précédente dans le cas où la solution φ^x de l'équation déterministe $\varphi'_t = \beta(\varphi_t)$, $\varphi_0 = x$, sort, au contraire, strictement de D en temps fini, pour tout $x \in D$.

1 Problème de sortie d'un domaine pour une diffusion : notations et rappels

On considère un mouvement brownien en dimension d issu de 0, $(B_t)_{t \geq 0}$, défini sur un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. On note $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$ la filtration engendrée par le brownien et complétée ($\mathcal{F}_0$ est triviale).

Soit un domaine borné

$$D := \{x : \phi(x) > 0\}$$

où ϕ est une application de $\mathbb{R}^d$ dans $\mathbb{R}$, de classe $\mathcal{C}^2$, telle que $\forall x \in \partial D$, $|\nabla \phi(x)| \neq 0$. On a donc $\partial D = \{x : \phi(x) = 0\}$.

On s'intéresse à l'équation différentielle stochastique (EDS) suivante, pour tous $x \in \mathbb{R}^d$ et $\varepsilon > 0$:

$$X_t^{\varepsilon,x} = x + \int_0^t \beta(X_r^{\varepsilon,x}) dr + \varepsilon \int_0^t \sigma(X_r^{\varepsilon,x}) dB_r, \quad t \geq 0 \quad (1)$$

Hypothèse 1. 1. β est une application de $\mathbb{R}^d$ dans lui-même, lipschitzienne. σ est une application de $\mathbb{R}^d$ dans $\mathcal{L}(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}^d)$, lipschitzienne.

2. Il existe $\eta > 0$, tel que pour tout $x \in \mathbb{R}^d$,

$$\sigma \sigma^*(x) \geq \eta I_d$$

où I_d est la matrice identité, et $\sigma^*(x)$ désigne la matrice transposée de $\sigma(x)$.

Sous l'hypothèse 1. 1., on a existence et unicité forte d'une solution de l'équation différentielle stochastique. Pour tout $T > 0$ fixé, le processus solution $(X_t^{\varepsilon, x})_{t \in [0, T]}$ est regardé comme une variable aléatoire à valeurs dans l'espace des fonctions continues sur $[0, T]$ à valeurs $\mathbb{R}^d$, noté $\mathcal{C}([0, T], \mathbb{R}^d)$.

On désigne par φ^x la solution déterministe de l'équation limite, quand ε tend vers 0 :

$$\varphi_t = x + \int_0^t \beta(\varphi_r) dr, \quad t \geq 0 \quad (2)$$

Pour tout $\varepsilon > 0$, tout $x \in \bar{D}$, on définit le temps d'arrêt :

$$\tau^{\varepsilon, x} := \inf \{t \geq 0 : X_t^{\varepsilon, x} \in \partial D\}$$

avec la convention habituelle $\inf \emptyset = +\infty$.

Théorème 1. (cf. [5]) Sous l'hypothèse 1, pour tout $\varepsilon > 0$ et tout $x \in \bar{D}$, $\tau^{\varepsilon, x}$ est fini presque sûrement et coïncide avec le temps de sortie du processus $X^{\varepsilon, x}$ de $\bar{D}$.

De plus, pour tout $\varepsilon > 0$, $X_{\tau^{\varepsilon, x}}^{\varepsilon, x}$ est continu en probabilité par rapport à x , $x \in \bar{D}$, et pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\sup_{x \in \bar{D}} \mathbb{E}[(\tau^{\varepsilon, x})^n] < \infty$$

Soit $x \in D$. Deux cas de convergence du point de sortie de la diffusion $X_{\tau^{\varepsilon, x}}^{\varepsilon, x}$ se présentent, selon le comportement du système déterministe limite (2). Dans le cas le plus simple, dont nous repoussons l'étude à la cinquième section de cet article, on suppose que la solution de l'équation limite sort toujours en temps fini de D . Le second, qui fait intervenir les grandes déviations, est celui où l'on suppose que la solution limite est, au contraire, « stable » dans D . Plus précisément, nous ferons désormais (sections 2, 3 et 4) l'hypothèse suivante concernant la solution φ^x de l'équation déterministe limite (2).

Hypothèse 2. Il existe $\alpha > 0$ tel que pour tous $x, x' \in \mathbb{R}^d$,

$$\langle x - x', \beta(x) - \beta(x') \rangle \leq -\alpha |x - x'|^2$$

On suppose aussi que la solution $(\varphi_t^x)_{t \geq 0}$ de l'équation (2) admet un unique point d'équilibre stable x^* dans D tel que pour tout $x \in D$, tout $t \geq 0$, $\varphi_t^x \in D$ et

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \varphi_t^x = x^*$$

De plus, toutes les trajectoires issues d'un point $x \in \partial D$ convergent vers x^* quand t tend vers l'infini.

On rappelle le principe de grandes déviations satisfait par le processus $(X_t^{\varepsilon,x})_{t \in [0,T]}$ (cf. [7]), et la définition du quasi-potentiel associé :

Théorème 2. *Sous l'hypothèse 1, $(X_t^{\varepsilon,x})_{t \in [0,T]}$ satisfait, quand ε tend vers 0, un principe de grandes déviations (PGD) dans $\mathcal{C}([0,T], \mathbb{R}^d)$ associé à la fonction de taux $I_{x,T}$ définie par :*

$$I_{x,T}(\varphi) := \begin{cases} \frac{1}{2} \int_0^T Q_{\varphi_t}^* [\dot{\varphi}_t - \beta(\varphi_t)] dt, & \text{si } \varphi \in H^1([0,T], \mathbb{R}^d) \text{ et } \varphi_0 = x; \\ +\infty, & \text{sinon.} \end{cases}$$

où pour tout $v \in \mathbb{R}^d$, $Q_{\varphi_t}^*(v) := \langle v, a^{-1}(\varphi_t)v \rangle$ car $a = \sigma\sigma^*$ est inversible.

Définition 1. *Pour tout $(y, z) \in \bar{D}^2$, tout $T > 0$, soit*

$$V(y, z, T) := \inf \left\{ I_{y,T}(\varphi), \varphi \in \mathcal{C}([0,T], \mathbb{R}^d), \varphi_T = z \right\}$$

Le quasi-potentiel V est défini par :

$$V(y, z) := \inf_{T>0} V(y, z, T)$$

Soit :

$$\bar{V} := \inf_{z \in \partial D} V(x^*, z)$$

Théorème 3. (cf. [7]) *Sous les hypothèses 1 et 2, pour tout $x \in D$, $\tau^{\varepsilon,x}$ tend vers $+\infty$ en probabilité quand ε tend vers 0, uniformément en x sur tout compact de D .*

De plus, si $\bar{V}$ est atteint en un unique point z^ de ∂D , alors pour tout $\gamma > 0$ et tout compact K de D :*

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \inf_{x \in K} \mathbb{P}(|X_{\tau^{\varepsilon,x}}^{\varepsilon,x} - z^*| < \gamma) = 1$$

2 Construction de la solution de l'EDSR et de sa limite, quand ε tend vers 0

Hypothèse 3. *Outre les hypothèses 1 et 2 on suppose que le minimum de potentiel $\bar{V}$ est atteint en un unique point z^* de ∂D :*

$$\bar{V} = V(x^*, z^*) < V(x^*, z), \forall z \in \partial D, z \neq z^*$$

où $x^ \in D$ est le point d'équilibre stable défini dans l'hypothèse 2.*

Soit $x \in \bar{D}$. Dans cette section, nous allons rappeler une construction, due à Briand et Hu ([2]), de la solution $Y^{\varepsilon,x} = (Y_t^{\varepsilon,x})_{t \geq 0}$ de l'équation différentielle stochastique rétrograde suivante, en dimension 1 :

$$Y_t^{\varepsilon,x} = g(X_{\tau^{\varepsilon,x}}^{\varepsilon,x}) + \int_{t \wedge \tau^{\varepsilon,x}}^{\tau^{\varepsilon,x}} f(X_s^{\varepsilon,x}, Y_s^{\varepsilon,x}, Z_s^{\varepsilon,x}) ds - \int_{t \wedge \tau^{\varepsilon,x}}^{\tau^{\varepsilon,x}} Z_s^{\varepsilon,x} dB_s, \quad t \geq 0 \quad (3)$$

Puis nous prouverons l'existence et l'unicité d'une fonction $\psi^x = (\psi_t^x)_{t \geq 0}$, solution de l'équation déterministe suivante sur $[0, +\infty[$:

$$\psi_t = g(z^*) + \int_t^\infty f(\varphi_s^x, \psi_s, 0) ds, \quad t \geq 0 \quad (4)$$

Sous l'hypothèse 3, quand ε tend vers 0, le temps terminal de l'EDSR (3) tend vers l'infini, et si g est continue, sa valeur terminale $g(X_{\tau^{\varepsilon,x}}^{\varepsilon,x})$ converge vers $g(z^*)$, pour tout $x \in D$. L'équation (4) est donc la limite déterministe « naturelle » de l'EDSR (3) lorsque $x \in D$. On remarque que si $x \in \partial D$, l'assertion précédente est fausse car alors $\tau^{\varepsilon,x} = 0$, et $Y_0^{\varepsilon,x} = g(x)$ p.s.

Afin de construire les processus $Y^{\varepsilon,x}$ et la fonction ψ^x , nous aurons besoin des hypothèses suivantes sur les coefficients de ces équations.

Hypothèse 4. *a) $g : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ est lipschitzienne et $f : \mathbb{R}^d \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ est lipschitzienne en x, y, z , bornée en z et monotone en y : il existe des constantes $K, \mu > 0$ telles que pour tous $x, x' \in \mathbb{R}^d$, $y, y' \in \mathbb{R}$, $z, z' \in \mathbb{R}^d$*

$$\begin{aligned} |f(x, y, z) - f(x', y', z')| &\leq K(|x - x'| + |y - y'| + |z - z'|) \\ |g(x) - g(x')| &\leq K|x - x'| \\ \langle y - y', f(x, y, z) - f(x, y', z) \rangle &\leq -\mu|y - y'|^2 \\ |f(0, 0, z)| &\leq K \end{aligned}$$

b) Pour tout $y \in \mathbb{R}$,

$$f(x^*, y, 0) = 0$$

f est continue et $\bar{D}$ est borné, donc $f(\varphi_t^x, 0, 0)$ est uniformément borné en t, x : quitte à changer la constante K , on peut dire que :

$$\forall x \in \bar{D}, \forall t \geq 0, \quad |f(\varphi_t^x, 0, 0)| \leq K$$

2.1 Construction de la solution de l'équation perturbée

On construit une solution de cette EDSR selon la méthode utilisée par Briand et Hu, dans [2]. Leur méthode se restreint à la dimension 1, mais résoudre une EDSR avec temps terminal aléatoire en dimension supérieure nécessite une condition structurelle sur f qui lie le coefficient de monotonie μ et la constante de Lipschitz K et n'est pas naturelle (cf. Darling et Pardoux dans [4]). Dans [5], nous résolvons des EDSR à horizon aléatoire en dimension quelconque sans ce type de condition, mais nous avons besoin de faire dépendre le générateur f du temps. La finalité de cet article étant la convergence d'EDP elliptiques semi-linéaires, nous restons en dimension 1. L'étude d'un problème similaire avec un générateur f dépendant du temps, en dimension k , et son application à la convergence d'une EDP parabolique semi-linéaire, sont faites dans [5].

Plus précisément, nous allons appliquer le Théorème 3.3. de l'article [2] de Briand et Hu. Les hypothèses de Lipschitz et de monotonie sur f sont assurées, il reste à vérifier que les conditions terminales sont uniformément bornées, ainsi que $|f(X_t^{\varepsilon,x}, 0, z)|$. Or

$$|g(X_{\tau^{\varepsilon,x}}^{\varepsilon,x})| \leq \sup_{a \in \bar{D}} |g(a)| < \infty$$

puisque g est continue sur le compact $\bar{D}$.

$$\begin{aligned} |f(X_{t \wedge \tau^{\varepsilon, x}}^{\varepsilon, x}, 0, z)| &\leq |f(0, 0, z)| + K |X_{t \wedge \tau^{\varepsilon, x}}^{\varepsilon, x}| \\ &\leq K \left(1 + \sup_{a \in \bar{D}} |a| \right) < \infty \end{aligned}$$

Il existe donc une solution $(Y_t^{\varepsilon, x}, Z_t^{\varepsilon, x})_{t \geq 0}$ de l'EDSR (3), avec $Y^{\varepsilon, x}$ continue bornée, et $Z^{\varepsilon, x}$ dans l'espace $\mathcal{M}^{2, -2\mu}(0, \tau^{\varepsilon, x}, \mathbb{R}^d)$, ensemble des processus X progressivement mesurables à valeurs dans $\mathbb{R}^d$ tels que

$$\|X\|_{-2\mu}^2 := \mathbb{E} \left[\int_0^{\tau^{\varepsilon, x}} e^{-2\mu s} \|X_s\|^2 ds \right] < \infty$$

De plus, elle est unique dans la classe des processus (Y, Z) tels que Y est continu borné et $Z \in \mathcal{M}_{loc}^2(0, \tau^{\varepsilon, x}, \mathbb{R}^d)$.

On la construit en se ramenant à un problème avec condition terminale nulle : $(Y^{\varepsilon, x}, Z^{\varepsilon, x})$ est solution de cette équation si et seulement si $(\tilde{Y}^{\varepsilon, x}, \tilde{Z}^{\varepsilon, x})$ est solution de

$$\tilde{Y}_t^{\varepsilon, x} = \int_{t \wedge \tau^{\varepsilon, x}}^{\tau^{\varepsilon, x}} h^{\varepsilon, x}(s, \tilde{Y}_s^{\varepsilon, x}, \tilde{Z}_s^{\varepsilon, x}) ds - \int_{t \wedge \tau^{\varepsilon, x}}^{\tau^{\varepsilon, x}} \tilde{Z}_s^{\varepsilon, x} dB_s, \quad t \geq 0$$

avec $\tilde{Y}_t^{\varepsilon, x} = Y_t^{\varepsilon, x} - \mathbb{E}[g(X_{\tau^{\varepsilon, x}}^{\varepsilon, x})/\mathcal{F}_t]$, $\tilde{Z}_t^{\varepsilon, x} = Z_t^{\varepsilon, x} - \eta_t^{\varepsilon, x}$, où

$$g(X_{\tau^{\varepsilon, x}}^{\varepsilon, x}) = \mathbb{E}[g(X_{\tau^{\varepsilon, x}}^{\varepsilon, x})] + \int_0^{\tau^{\varepsilon, x}} \eta_s^{\varepsilon, x} dB_s$$

et

$$h^{\varepsilon, x}(t, y, z) = \mathbb{1}_{\{t \leq \tau^{\varepsilon, x}\}} f(X_t^{\varepsilon, x}, y + \mathbb{E}[g(X_{\tau^{\varepsilon, x}}^{\varepsilon, x})/\mathcal{F}_t], z + \eta_t^{\varepsilon, x})$$

$(\tilde{Y}^{\varepsilon, x}, \tilde{Z}^{\varepsilon, x})$ est obtenu comme limite de la suite de processus $(\tilde{Y}^{n, \varepsilon, x}, \tilde{Z}^{n, \varepsilon, x})_{n \in \mathbb{N}}$, où pour tout $n \in \mathbb{N}$, $(\tilde{Y}^{n, \varepsilon, x}, \tilde{Z}^{n, \varepsilon, x})$ est la solution classique de l'EDSR suivante sur $[0, n]$:

$$\tilde{Y}_t^{n, \varepsilon, x} = \int_t^n h^{\varepsilon, x}(s, \tilde{Y}_s^{n, \varepsilon, x}, \tilde{Z}_s^{n, \varepsilon, x}) ds - \int_t^n \tilde{Z}_s^{n, \varepsilon, x} dB_s, \quad 0 \leq t \leq n$$

prolongée par 0 pour $t > n$.

2.2 Construction de la solution de l'équation limite, quand ε tend vers 0

Dans cette sous-section, on construit une solution de l'équation déterministe (4) :

$$\psi_t = g(z^*) + \int_t^\infty f(\varphi_s^x, \psi_s, 0) ds, \quad t \geq 0$$

On commence par remarquer que si $x = x^*$, φ^x est constante égale à x^* , donc il y a existence et unicité d'une solution, donnée par la constante $g(z^*)$.

Lemme 1. *Si ψ^1 et ψ^2 sont deux solutions de (4) de classe $\mathcal{C}^1$, alors $\psi^1 = \psi^2$.*

Démonstration.

Soient ψ^1 et ψ^2 deux solutions $\mathcal{C}^1$ de (4). On pose $\tilde{\psi} = \psi^1 - \psi^2$. $\tilde{\psi}$ est $\mathcal{C}^1$, de limite nulle en $+\infty$.

$$\begin{aligned}\tilde{\psi}'_t &= -f(\varphi_t^x, \psi_t^1, 0) + f(\varphi_t^x, \psi_t^2, 0) \\ -2\tilde{\psi}_t \tilde{\psi}'_t &= 2(\psi_t^1 - \psi_t^2)(f(\varphi_t^x, \psi_t^1, 0) - f(\varphi_t^x, \psi_t^2, 0))\end{aligned}$$

Par monotonie,

$$-2\tilde{\psi}_t \tilde{\psi}'_t \leq -2\mu |\tilde{\psi}_t|^2$$

On intègre cette inégalité entre 0 et T :

$$-|\tilde{\psi}_T|^2 + |\tilde{\psi}_0|^2 \leq -2\mu \int_0^T |\tilde{\psi}_s|^2 ds$$

$\mu > 0$, donc

$$0 \leq \int_0^T |\tilde{\psi}_s|^2 ds \leq \frac{1}{2\mu} |\tilde{\psi}_T|^2$$

Le terme de droite tend vers 0 quand T tend vers l'infini, donc

$$\int_0^\infty |\tilde{\psi}_s|^2 ds = 0$$

Par conséquent $\tilde{\psi}_s = 0$ presque partout. Comme ψ^1 et ψ^2 sont continues, on en déduit que pour tout $t \geq 0$,

$$\psi_t^1 = \psi_t^2$$

□

Proposition 1. *Si $g(z^*) = 0$, l'équation (4) admet une solution unique de classe $\mathcal{C}^1$, qui est de plus continue par rapport à la condition initiale x pour la norme uniforme sur tout compact de $[0, \infty[$.*

Démonstration.

Soit $n \in \mathbb{N}$. On s'intéresse à l'équation sur $[0, n]$;

$$\begin{aligned}\psi'_t &= -f(\varphi_t^x, \psi_t, 0), \quad 0 \leq t \leq n \\ \psi_n &= 0\end{aligned}$$

Par Cauchy-Lipschitz, elle admet une solution, notée $\psi^{n,x}$, $\mathcal{C}^1$ sur $[0, n]$. De plus, cette solution est continue par rapport au paramètre x , car φ^x est continue par rapport à sa condition initiale, et f est continue.

On prolonge $\psi^{n,x}$ par 0 sur $[n, \infty[$. On obtient ainsi une fonction encore notée $\psi^{n,x}$, continue sur $[0, \infty[$, $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+$ privé de n .

Majoration de $\psi^{n,x}$

Soit, pour $0 \leq s \leq n$,

$$\alpha_s^{n,x} := \begin{cases} \frac{f(\varphi_s^x, \psi_s^{n,x}, 0) - f(\varphi_s^x, 0, 0)}{\psi_s^{n,x}} & \text{si } \psi_s^{n,x} \neq 0 \\ -\mu & \text{sinon} \end{cases}$$

Pour tout s, n, x , $\alpha_s^{n,x} \leq -\mu$ par monotonie de f .

L'équation satisfaite par $\psi^{n,x}$ peut se réécrire

$$(\psi^{n,x})'_s = -\alpha_s^{n,x} \psi_s^{n,x} - f(\varphi_s^x, 0, 0), \quad s \in \mathbb{R}_+ \setminus \{n\}$$

On pose $R_s^{n,x} := \exp\left(\int_\theta^s \alpha_v^{n,x} dv\right)$, pour θ fixé dans $[0, n]$.

$R^{n,x}$ est dérivable presque partout, et

$$(\psi^{n,x} R^{n,x})'_t = -f(\varphi_t^x, 0, 0) R_t^{n,x}$$

On intègre entre θ et n :

$$\psi_n^{n,x} R_n^{n,x} - \psi_\theta^{n,x} R_\theta^{n,x} = - \int_\theta^n f(\varphi_s^x, 0, 0) R_s^{n,x} ds$$

Comme $\psi_n^{n,x} = 0$ et $R_\theta^{n,x} = 1$, on en déduit que :

$$\psi_\theta^{n,x} = \int_\theta^n f(\varphi_s^x, 0, 0) R_s^{n,x} ds$$

Or $R_s^{n,x} \leq \exp(-\mu(s-\theta))$ et $|f(\varphi_s^x, 0, 0)| \leq K$, donc

$$\begin{aligned} |\psi_\theta^{n,x}| &\leq \int_\theta^n K e^{-\mu(s-\theta)} ds \\ &\leq \frac{K}{\mu} (1 - e^{-\mu(n-\theta)}) \\ &\leq \frac{K}{\mu} \end{aligned}$$

Montrons que la suite réelle $(\psi_\theta^{n,x})_{n \in \mathbb{N}}$ est de Cauchy.

On fixe $0 \leq \theta \leq n \leq m$, et on pose $\Delta\psi = \psi^{m,x} - \psi^{n,x}$. Ainsi,

$$\begin{aligned} \psi_t^{n,x} &= \int_t^n f(\varphi_s^x, \psi_s^{n,x}, 0) ds \\ \psi_t^{m,x} &= \int_t^m f(\varphi_s^x, \psi_s^{m,x}, 0) ds \end{aligned}$$

$$\Delta\psi_t = \int_t^m f(\varphi_s^x, \psi_s^{m,x}, 0) - f(\varphi_s^x, \psi_s^{n,x}, 0) \mathbb{1}_{\{s \leq n\}} ds$$

On définit comme précédemment

$$\alpha_s^{m,n,x} := \begin{cases} \frac{f(\varphi_s^x, \psi_s^{m,x}, 0) - f(\varphi_s^x, \psi_s^{n,x}, 0)}{\Delta\psi_s} & \text{si } \Delta\psi_s \neq 0 \\ -\mu & \text{sinon} \end{cases}$$

Pour tout s , $\alpha_s^{m,n,x} \leq -\mu$.

L'équation satisfaite par $\Delta\psi$ s'exprime sous la forme :

$$-\Delta\psi'_s = \alpha_s^{m,n,x} \Delta\psi_s + \mathbf{1}_{\{s>n\}} f(\varphi_s^x, 0, 0), \quad s \leq m$$

On pose $R_t^{m,n,x} := \exp\left(\int_\theta^t \alpha_s^{m,n,x} ds\right)$. Alors

$$R_t^{m,n,x} \leq e^{-\mu(t-\theta)}$$

$R^{m,n,x}$ est dérivable presque partout et

$$(\Delta\psi R^{m,n,x})'_t = -\mathbf{1}_{\{t>n\}} f(\varphi_t^x, 0, 0) R_t^{m,n,x}$$

On intègre entre θ et m .

$$\begin{aligned} -\Delta\psi_\theta &= -\int_\theta^m \mathbf{1}_{\{s>n\}} f(\varphi_s^x, 0, 0) R_s^{m,n,x} ds \\ &= -\int_n^m f(\varphi_s^x, 0, 0) R_s^{m,n,x} ds \end{aligned}$$

$$|\Delta\psi_\theta| \leq \int_n^m K e^{-\mu(s-\theta)} ds$$

$$|\psi_\theta^{m,x} - \psi_\theta^{n,x}| \leq \frac{K}{\mu} e^{\mu\theta} (e^{-\mu n} - e^{-\mu m}) \quad (5)$$

On vient de démontrer cette majoration pour $0 \leq \theta \leq n \leq m$. Elle est clairement vraie si $n \leq m \leq \theta$ car ψ^n et ψ^m sont nuls après m .

Si $n \leq \theta \leq m$, on a $\psi_\theta^n = 0$, et donc

$$\begin{aligned} |\psi_\theta^{m,x} - \psi_\theta^{n,x}| &= |\psi_\theta^{m,x}| \\ &\leq \frac{K}{\mu} (1 - e^{-\mu(m-\theta)}) \\ &\leq \frac{K}{\mu} e^{\mu\theta} (e^{-\mu\theta} - e^{-\mu m}) \\ &\leq \frac{K}{\mu} e^{\mu\theta} (e^{-\mu n} - e^{-\mu m}) \end{aligned}$$

La relation (5) est vérifiée pour tout $\theta \geq 0$, tout $n \leq m$. La suite $(\psi_\theta^{n,x})_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy, elle converge donc vers une limite que l'on note ψ_θ^x .

De plus, faisons tendre m vers l'infini dans (5), à n fixé :

$$|\psi_\theta^x - \psi_\theta^{n,x}| \leq \frac{K}{\mu} e^{\mu\theta} e^{-\mu n}$$

Pour $\theta \in [0, M]$,

$$|\psi_\theta^x - \psi_\theta^{n,x}| \leq \frac{K}{\mu} e^{\mu M} e^{-\mu n}$$

La convergence est donc uniforme en x , uniforme en θ sur tout compact. Par conséquent, la fonction limite est continue en θ sur tout $[0, M]$, et donc sur $\mathbb{R}_+$. Elle est aussi continue par rapport à la condition initiale x .

D'autre part, pour tout θ , tout $x \in \bar{D}$,

$$|\psi_\theta^x| \leq \frac{K}{\mu}$$

Vérifions que l'application obtenue satisfait l'équation (4).

Soit $0 \leq \theta \leq t$, on a pour tout n assez grand ($n \geq t$),

$$\psi_\theta^{n,x} - \psi_t^{n,x} = \int_\theta^t f(\varphi_s^x, \psi_s^{n,x}, 0) ds$$

$\psi_s^{n,x}$ tend vers ψ_s^x uniformément sur tout compact, donc $f(\varphi_s^x, \psi_s^{n,x}, 0)$ tend vers $f(\varphi_s^x, \psi_s^x, 0)$ uniformément sur tout compact (car f est lipschitzienne en y). On peut ainsi intervertir limite et intégrale, et on obtient à la limite, pour $0 \leq \theta \leq t$:

$$\psi_\theta^x - \psi_t^x = \int_\theta^t f(\varphi_s^x, \psi_s^x, 0) ds$$

Il apparaît donc que ψ^x est dérivable sur $\mathbb{R}_+$, avec pour tout $t \geq 0$,

$$(\psi^x)'_t = -f(\varphi_t^x, \psi_t^x, 0)$$

ψ^x est donc de classe $\mathcal{C}^1$, satisfait (4).

Condition terminale

Montrons que ψ^x admet une limite nulle en $+\infty$. Pour ce faire, on majore $\psi_t^{n,x}$ avec $n \in \mathbb{N}$, $t \in [0, n]$.

$$\begin{aligned} \psi_t^{n,x} &= \int_t^n f(\varphi_s^x, 0, 0) R_s^{n,x} ds \\ |\psi_t^{n,x}| &\leq \int_t^n |f(\varphi_s^x, 0, 0)| R_s^{n,x} ds \\ &\leq \int_t^n |f(\varphi_s^x, 0, 0)| e^{-\mu(s-t)} ds \end{aligned}$$

Or, pour tout $s \geq 0$,

$$\begin{aligned} |f(\varphi_s^x, 0, 0)| &= |f(\varphi_s^x, 0, 0) - f(x^*, 0, 0)| \\ &\leq K |\varphi_s^x - x^*| \end{aligned}$$

On utilise alors le lemme suivant :

Lemme 2. Pour tout $s \geq 0$, tout $x \in \bar{D}$,

$$|\varphi_s^x - x^*| \leq |x - x^*| e^{-\alpha s}$$

où α est la constante de monotonie de β (hypothèse 2).

Preuve du Lemme 2.

$$\varphi_s^x - x^* = x - x^* + \int_0^s \beta(\varphi_r^x) dr$$

Soit $\pi_s = \varphi_s^x - x^*$. $\pi'_s = \beta(\varphi_s^x) = \beta(\varphi_s^x) - \beta(x^*)$. Par monotonie de β , on a :

$$\begin{aligned} \langle \pi_s, \pi'_s \rangle &= \langle \varphi_s^x - x^*, \beta(\varphi_s^x) - \beta(x^*) \rangle \\ &\leq -\alpha |\varphi_s^x - x^*|^2 = -\alpha |\pi_s|^2 \end{aligned}$$

On intègre entre 0 et s :

$$\frac{1}{2} (|\pi_s|^2 - |\pi_0|^2) \leq -\alpha \int_0^s |\pi_r|^2 dr$$

On en déduit par le lemme de Gronwall que

$$|\pi_s|^2 \leq |x - x^*|^2 e^{-2\alpha s}$$

□

Revenons à la preuve du théorème, on obtient :

$$|f(\varphi_s^x, 0, 0)| \leq K |x - x^*| e^{-\alpha s}$$

Par suite,

$$\begin{aligned} |\psi_t^{n,x}| &\leq K |x - x^*| \int_t^n e^{-\alpha s} e^{-\mu(s-t)} ds \\ &\leq \frac{K}{\mu + \alpha} |x - x^*| \left(e^{-\alpha t} - e^{-(\alpha + \mu)n + \mu t} \right) \end{aligned}$$

Par passage à la limite,

$$|\psi_t^x| \leq \frac{K}{\mu + \alpha} |x - x^*| e^{-\alpha t}$$

ψ^x admet donc une limite nulle en $+\infty$.

□

Théorème 4. *L'équation (4) admet une solution unique notée ψ^x , de classe $\mathcal{C}^1$. De plus ψ^x est continue par rapport à la condition initiale x pour la norme uniforme sur tout compact de $[0, \infty[$.*

Démonstration.

ψ^x est solution de (4) si et seulement si $\tilde{\psi}_t^x = \psi_t^x - g(z^*)$ est solution de :

$$\tilde{\psi}_t = \int_t^\infty h(\varphi_r^x, \tilde{\psi}_r, 0) dr, \quad t \geq 0$$

avec $h(a, y, z) = f(a, y + g(z^*), z)$.

h est K -lipschitzienne en a, y, z comme f , μ -monotone en y comme f , continue. De plus $h(x^*, y, 0) = 0$ pour tout $y \in \mathbb{R}$.

On peut donc appliquer la proposition précédente, qui nous donne l'existence de $\tilde{\psi}^x$, ce qui est parfaitement équivalent à l'existence de ψ^x .

La fonction ainsi obtenue est aussi continue par rapport à la condition initiale x pour la norme uniforme sur tout compact de $[0, \infty[$.

□

3 Convergence de la solution d'une équation aux dérivées partielles elliptique semi-linéaire

Définition 2. Soient $\varepsilon > 0$, $x \in \bar{D}$ et $(Y_t^{\varepsilon,x})_{t \geq 0}$ la solution de l'équation (3) obtenue dans la section 2.1. On définit une application $u^\varepsilon : \bar{D} \rightarrow \mathbb{R}$ par

$$u^\varepsilon(x) := Y_0^{\varepsilon,x}, \quad \forall x \in \bar{D}$$

Proposition 2. Pour tout $\varepsilon > 0$, tout $x \in D$,

$$Y_t^{\varepsilon,x} = u^\varepsilon(X_t^{\varepsilon,x}), \quad \forall 0 \leq t \leq \tau^{\varepsilon,x}$$

Démonstration.

On utilise la propriété de flot de l'EDS (1) et l'unicité de la solution de l'EDSR (3), pour montrer que si $0 \leq t \leq \tau^{\varepsilon,x}$, si $r \geq 0$,

$$Y_r^{\varepsilon,X_t^{\varepsilon,x}} = Y_{r+t}^{\varepsilon,x}$$

D'où, en $r = 0$,

$$Y_t^{\varepsilon,x} = Y_0^{\varepsilon,X_t^{\varepsilon,x}} = u^\varepsilon(X_t^{\varepsilon,x})$$

□

Définition 3. Pour tout $x \in \bar{D}$, soit $(\psi_t^x)_{t \geq 0}$ la solution de l'équation (4) donnée par le Théorème 4. On définit une application u de $\bar{D}$ dans $\mathbb{R}$ par

$$u(x) := \psi_0^x, \quad \forall x \in \bar{D}$$

Proposition 3. Pour tout $x \in D$,

$$\psi_t^x = u(\varphi_t^x), \quad \forall t \geq 0$$

Démonstration.

De même que dans le cas stochastique, on montre facilement, en utilisant la propriété de flot de l'équation différentielle (2) et l'unicité des solutions de (4), que :

$$\psi_t^x = \psi_0^{\varphi_t^x} = u(\varphi_t^x)$$

□

Corollaire 1.

$$g(z^*) = u(x^*)$$

Démonstration.

Pour tout $t \geq 0$, tout $x \in D$, $u(\varphi_t^x) = \psi_t^x$. u est continue sur D (Théorème 4), $\lim_{t \rightarrow \infty} \varphi_t^x = x^*$, donc le terme de gauche tend vers $u(x^*)$. Et par construction de ψ_t^x , on a $\lim_{t \rightarrow \infty} \psi_t^x = g(z^*)$.

□

Dans cette section, on s'intéresse à la convergence quand ε tend vers 0 de la solution de l'équation aux dérivées partielles elliptique semi-linéaire suivante.

$$\begin{aligned}\mathcal{L}^{\varepsilon,x}u^\varepsilon(x) + f(x, u^\varepsilon(x), \varepsilon \nabla u^\varepsilon(x) \sigma(x)) &= 0, & x \in D \\ u^\varepsilon(x) &= g(x), & x \in \partial D\end{aligned}\tag{6}$$

où $\mathcal{L}^{\varepsilon,x}$ désigne le générateur infinitésimal de la diffusion $X^{\varepsilon,x}$:

$$\mathcal{L}^{\varepsilon,x} = \sum_{i=1}^d \beta_i(x) \frac{\partial}{\partial x_i} + \frac{\varepsilon^2}{2} \sum_{i,j=1}^d a_{i,j}(x) \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j}$$

Nous allons montrer que la fonction u^ε de la définition 2 est une solution de viscosité continue de (6), au sens suivant :

Définition 4. 1. Une fonction continue $u^\varepsilon : \bar{D} \rightarrow \mathbb{R}$ est appelée sous-solution de viscosité de (6) si $u^\varepsilon(x) \leq g(x)$ pour tout $x \in \partial D$ et si pour toute fonction $\nu \in \mathcal{C}^2(D, \mathbb{R})$, tout maximum local $x_0 \in D$ de $u^\varepsilon - \nu$, alors

$$-\mathcal{L}^{\varepsilon,x_0}\nu(x_0) - f(x_0, u^\varepsilon(x_0), \varepsilon \nabla \nu(x_0) \sigma(x_0)) \leq 0$$

2. Une fonction continue $u^\varepsilon : \bar{D} \rightarrow \mathbb{R}$ est appelée sur-solution de viscosité de (6) si $u^\varepsilon(x) \geq g(x)$ pour tout $x \in \partial D$ et si pour toute fonction $\nu \in \mathcal{C}^2(D, \mathbb{R})$, tout minimum local $x_0 \in D$ de $u^\varepsilon - \nu$, alors

$$-\mathcal{L}^{\varepsilon,x_0}\nu(x_0) - f(x_0, u^\varepsilon(x_0), \varepsilon \nabla \nu(x_0) \sigma(x_0)) \geq 0$$

3. Une fonction continue $u^\varepsilon : \bar{D} \rightarrow \mathbb{R}$ est appelée solution de viscosité de (6) si elle est à la fois sous-solution de viscosité et sur-solution de viscosité.

On ne considère pas ici des conditions aux limites au sens de la viscosité, mais au sens classique. Celles-ci sont facilement vérifiables sous nos hypothèses : si $x_0 \in \partial D$, $\tau^{\varepsilon,x_0} = 0$ presque sûrement, donc $u^\varepsilon(x_0) = Y_0^{\varepsilon,x_0} = Y_{\tau^{\varepsilon,x_0}}^{\varepsilon,x_0} = g(x_0)$.

On s'intéresse à l'EDP du premier ordre suivante :

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^d \beta_i(x) \frac{\partial u}{\partial x_i}(x) + f(x, u(x), 0) &= 0, & \forall x \in D \\ u(x^*) &= g(z^*)\end{aligned}\tag{7}$$

où les points $x^* \in D$ et $z^* \in \partial D$ sont respectivement définis dans les hypothèses 2 et 3.

Remarque 1. On ne s'impose pas une vraie condition aux limites, seulement la valeur de u au point d'équilibre stable $x^* \in D$.

Nous allons aussi prouver que la fonction u de la définition 3 est solution de l'EDP (7), au sens de la viscosité.

Définition 5. 1. On dira que u est une sous-solution de viscosité de (7) si u est une fonction continue sur D telle que $u(x^*) \leq g(z^*)$ et pour toute $h \in \mathcal{C}^1(D, \mathbb{R})$, tout $x_0 \in D$ maximum local de $u - h$,

$$-\sum_{i=1}^d \beta_i(x_0) \frac{\partial h}{\partial x_i}(x_0) - f(x_0, u(x_0), 0) \leq 0$$

2. On dira que u est une sur-solution de viscosité de (7) si u est une fonction continue sur D telle que $u(x^*) \geq g(z^*)$ et pour toute $h \in \mathcal{C}^1(D, \mathbb{R})$, tout $x_0 \in D$ minimum local de $u - h$,

$$-\sum_{i=1}^d \beta_i(x_0) \frac{\partial h}{\partial x_i}(x_0) - f(x_0, u(x_0), 0) \geq 0$$

3. Une solution de viscosité de (7) est une fonction qui en est à la fois sous-solution de viscosité et sur-solution de viscosité.

Nous pouvons maintenant énoncer le résultat principal de cette section :

Théorème 5. Sous les hypothèses 3 et 4, soient u^ε les fonctions données, respectivement, par les définitions 2 et 3.

1. Pour tout $\varepsilon > 0$, la fonction u^ε est l'unique solution de viscosité continue du problème (6).
2. La fonction u est une solution de viscosité continue de (7).
3. Pour tout K compact de D , la fonction u^ε converge uniformément, sur K , vers la fonction u , quand ε tend vers 0.
4. (i) Si v^ε est une solution de classe $\mathcal{C}^2$ du problème (6), à dérivées bornées, alors v^ε coïncide avec u^ε .
(ii) Si v est une solution de classe $\mathcal{C}^1$ du problème (7), alors v coïncide avec u . Il y a donc unicité d'une solution classique du problème (7).

Démonstration.

1. u^ε est continue.

Pour le montrer, on a besoin des lemmes suivants :

Lemme 3. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\varepsilon > 0$, la fonction de $\bar{D}$ dans $\mathbb{R}$ qui à x associe $\tilde{Y}_0^{n,\varepsilon,x}$ est continue.

Démonstration du Lemme 3.

On dispose des estimations classiques sur les différences entre solutions (cf. [8]). Soient $x, x' \in \bar{D}$. Il existe une constante c dépendant seulement de K , μ et n telle que :

$$\mathbb{E} \left[\sup_{t \in [0, n]} |\tilde{Y}_t^{n,\varepsilon,x} - \tilde{Y}_t^{n,\varepsilon,x'}|^2 \right] \leq c \mathbb{E} \left[\int_0^n \left| h^{\varepsilon,x}(s, \tilde{Y}_s^{n,\varepsilon,x}, \tilde{Z}_s^{n,\varepsilon,x}) - h^{\varepsilon,x'}(s, \tilde{Y}_s^{n,\varepsilon,x}, \tilde{Z}_s^{n,\varepsilon,x}) \right|^2 ds \right]$$

Pour majorer cette espérance, on coupe l'intégrale en $\tau^{\varepsilon,x} \wedge \tau^{\varepsilon,x'}$, si $\tau^{\varepsilon,x} \wedge \tau^{\varepsilon,x'} < n$; soit :

$$(a) := c \mathbb{E} \left[\int_0^{\tau^{\varepsilon,x} \wedge \tau^{\varepsilon,x'} \wedge n} |f(X_s^{\varepsilon,x}, \tilde{Y}_s^{n,\varepsilon,x} + \mathbb{E}[g(X_{\tau^{\varepsilon,x}}^{\varepsilon,x})/\mathcal{F}_s], \tilde{Z}_s^{n,\varepsilon,x} + \eta_s^{\varepsilon,x}) - f(X_s^{\varepsilon,x'}, \tilde{Y}_s^{n,\varepsilon,x} + \mathbb{E}[g(X_{\tau^{\varepsilon,x'}}^{\varepsilon,x'})/\mathcal{F}_s], \tilde{Z}_s^{n,\varepsilon,x} + \eta_s^{\varepsilon,x'})|^2 ds \right]$$

$$(a) \leq 3cK^2 \mathbb{E} \left[\int_0^{\tau^{\varepsilon,x} \wedge \tau^{\varepsilon,x'} \wedge n} |X_s^{\varepsilon,x} - X_s^{\varepsilon,x'}|^2 + \left| \mathbb{E}[g(X_{\tau^{\varepsilon,x}}^{\varepsilon,x})/\mathcal{F}_s] - \mathbb{E}[g(X_{\tau^{\varepsilon,x'}}^{\varepsilon,x'})/\mathcal{F}_s] \right|^2 ds \right] \\ + 3cK^2 \mathbb{E} \left[\int_0^{\tau^{\varepsilon,x} \wedge \tau^{\varepsilon,x'} \wedge n} |\eta_s^{\varepsilon,x} - \eta_s^{\varepsilon,x'}|^2 ds \right]$$

Or,

$$\mathbb{E} \left[\sup_{s \in [0,n]} |X_s^{\varepsilon,x} - X_s^{\varepsilon,x'}|^2 \right] \leq Ce^{Cn} |x - x'|^2$$

où C est indépendante de ε et x .

$$\mathbb{E} \left[\int_0^{\tau^{\varepsilon,x} \wedge \tau^{\varepsilon,x'} \wedge n} \left| \mathbb{E}[g(X_{\tau^{\varepsilon,x}}^{\varepsilon,x})/\mathcal{F}_s] - \mathbb{E}[g(X_{\tau^{\varepsilon,x'}}^{\varepsilon,x'})/\mathcal{F}_s] \right|^2 ds \right] \\ = \mathbb{E} \left[\int_0^{\tau^{\varepsilon,x} \wedge \tau^{\varepsilon,x'} \wedge n} \left| \mathbb{E}[g(X_{\tau^{\varepsilon,x}}^{\varepsilon,x}) - g(X_{\tau^{\varepsilon,x'}}^{\varepsilon,x'})/\mathcal{F}_s] \right|^2 ds \right] \\ \leq \mathbb{E} \left[\int_0^n \mathbb{E} \left[\left| g(X_{\tau^{\varepsilon,x}}^{\varepsilon,x}) - g(X_{\tau^{\varepsilon,x'}}^{\varepsilon,x'}) \right|^2 / \mathcal{F}_s \right] ds \right] \\ \leq \int_0^n \mathbb{E} \left[\left| g(X_{\tau^{\varepsilon,x}}^{\varepsilon,x}) - g(X_{\tau^{\varepsilon,x'}}^{\varepsilon,x'}) \right|^2 \right] ds$$

Par suite,

$$(a) \leq 3cK^2n \left(Ce^{Cn} |x - x'|^2 + K^2 \mathbb{E} \left[|X_{\tau^{\varepsilon,x}}^{\varepsilon,x} - X_{\tau^{\varepsilon,x'}}^{\varepsilon,x'}|^2 \right] \right) \\ + 3cK^2 \mathbb{E} \left[\int_0^{\tau^{\varepsilon,x} \wedge \tau^{\varepsilon,x'}} |\eta_s^{\varepsilon,x} - \eta_s^{\varepsilon,x'}|^2 ds \right]$$

Et :

$$\begin{aligned}
& \mathbb{E} \left[\int_0^{\tau^{\varepsilon,x} \wedge \tau^{\varepsilon,x'}} |\eta_s^{\varepsilon,x} - \eta_s^{\varepsilon,x'}|^2 ds \right] \\
&= \mathbb{E} \left[\left(\int_0^{\tau^{\varepsilon,x} \wedge \tau^{\varepsilon,x'}} (\eta_s^{\varepsilon,x} - \eta_s^{\varepsilon,x'}) dB_s \right)^2 \right] \\
&= \mathbb{E} \left[\left\{ \mathbb{E} \left[\left(g(X_{\tau^{\varepsilon,x}}^{\varepsilon,x}) - \mathbb{E}[g(X_{\tau^{\varepsilon,x}}^{\varepsilon,x})] - g(X_{\tau^{\varepsilon,x'}}^{\varepsilon,x'}) + \mathbb{E}[g(X_{\tau^{\varepsilon,x'}}^{\varepsilon,x'})] \right) / \mathcal{F}_{\tau^{\varepsilon,x} \wedge \tau^{\varepsilon,x'}} \right] \right\}^2 \right] \\
&\leq 4\mathbb{E} \left[\left| g(X_{\tau^{\varepsilon,x}}^{\varepsilon,x}) - g(X_{\tau^{\varepsilon,x'}}^{\varepsilon,x'}) \right|^2 \right] \\
&\leq 4K^2 \mathbb{E} \left[\left| X_{\tau^{\varepsilon,x}}^{\varepsilon,x} - X_{\tau^{\varepsilon,x'}}^{\varepsilon,x'} \right|^2 \right]
\end{aligned}$$

$$(a) \leq C(n) \left(|x - x'|^2 + \mathbb{E} \left[\left| X_{\tau^{\varepsilon,x}}^{\varepsilon,x} - X_{\tau^{\varepsilon,x'}}^{\varepsilon,x'} \right|^2 \right] \right)$$

Sur $\{\tau^{\varepsilon,x} \vee \tau^{\varepsilon,x'} \leq n\}$, on utilise :

$$\begin{aligned}
(b) &:= c \mathbb{E} \left[\int_{\tau^{\varepsilon,x} \wedge \tau^{\varepsilon,x'}}^{\tau^{\varepsilon,x} \vee \tau^{\varepsilon,x'}} \left| h^{\varepsilon,x}(s, \tilde{Y}_s^{n,\varepsilon,x}, \tilde{Z}_s^{n,\varepsilon,x}) - h^{\varepsilon,x'}(s, \tilde{Y}_s^{n,\varepsilon,x}, \tilde{Z}_s^{n,\varepsilon,x}) \right|^2 ds \mathbf{1}_{\{\tau^{\varepsilon,x} \vee \tau^{\varepsilon,x'} \leq n\}} \right] \\
&= c \mathbb{E} \left[\mathbf{1}_{\{\tau^{\varepsilon,x} \leq \tau^{\varepsilon,x'} \leq n\}} \int_{\tau^{\varepsilon,x}}^{\tau^{\varepsilon,x'}} \left| f \left(X_s^{\varepsilon,x'}, \tilde{Y}_s^{n,\varepsilon,x} + \mathbb{E} \left[g(X_{\tau^{\varepsilon,x'}}^{\varepsilon,x'}) / \mathcal{F}_s \right], \tilde{Z}_s^{n,\varepsilon,x} + \eta_s^{\varepsilon,x'} \right) \right|^2 ds \right. \\
&\quad \left. + c \mathbb{E} \left[\mathbf{1}_{\{n \geq \tau^{\varepsilon,x} > \tau^{\varepsilon,x'}\}} \int_{\tau^{\varepsilon,x'}}^{\tau^{\varepsilon,x}} \left| f \left(X_s^{\varepsilon,x}, \tilde{Y}_s^{n,\varepsilon,x} + \mathbb{E} \left[g(X_{\tau^{\varepsilon,x}}^{\varepsilon,x}) / \mathcal{F}_s \right], \tilde{Z}_s^{n,\varepsilon,x} + \eta_s^{\varepsilon,x} \right) \right|^2 ds \right] \right]
\end{aligned}$$

f est uniformément bornée en z et en $x \in \bar{D}$ (par compacité), donc si on prouve que les processus $\tilde{Y}_s^{n,\varepsilon,x} + \mathbb{E} \left[g(X_{\tau^{\varepsilon,x}}^{\varepsilon,x}) / \mathcal{F}_s \right]$ sont uniformément bornés, on aura :

$$(b) \leq C \mathbb{E} \left[\mathbf{1}_{\{\tau^{\varepsilon,x} \leq \tau^{\varepsilon,x'} \leq n\}} \int_{\tau^{\varepsilon,x}}^{\tau^{\varepsilon,x'}} ds \right] + C \mathbb{E} \left[\mathbf{1}_{\{n \geq \tau^{\varepsilon,x} > \tau^{\varepsilon,x'}\}} \int_{\tau^{\varepsilon,x'}}^{\tau^{\varepsilon,x}} ds \right]$$

Or

$$\sup_{x \in D} |g(X_{\tau^{\varepsilon,x}}^{\varepsilon,x})| \leq \sup_{a \in \bar{D}} |g(a)| < \infty$$

par continuité et compacité.

De plus, les processus $\tilde{Y}_s^{n,\varepsilon,x}$ sont aussi uniformément bornés (cf. leur construction dans [2]).

Finalement,

$$(b) \leq C \mathbb{E} \left[|\tau^{\varepsilon,x} - \tau^{\varepsilon,x'}| \mathbf{1}_{\{\tau^{\varepsilon,x} \vee \tau^{\varepsilon,x'} \leq n\}} \right]$$

Enfin,

$$\begin{aligned}
|\tilde{Y}_0^{n,\varepsilon,x} - \tilde{Y}_0^{n,\varepsilon,x'}| &\leq \mathbb{E} \left[\sup_{t \in [0,n]} |\tilde{Y}_t^{n,\varepsilon,x} - \tilde{Y}_t^{n,\varepsilon,x'}|^2 \right] \\
&\leq (a) + (b) \\
&\leq C(n) \left(|x - x'|^2 + \mathbb{E} \left[\left| X_{\tau^{\varepsilon,x}}^{\varepsilon,x} - X_{\tau^{\varepsilon,x'}}^{\varepsilon,x'} \right|^2 \right] \right) \\
&\quad + C \mathbb{E} \left[|\tau^{\varepsilon,x} \wedge n - \tau^{\varepsilon,x'} \wedge n| \mathbf{1}_{\{\tau^{\varepsilon,x} \vee \tau^{\varepsilon,x'} \leq n\}} \right]
\end{aligned}$$

On conclut en appliquant le Théorème 1 : quand x' tend vers x , $\tau^{\varepsilon,x'} \wedge n$ (respectivement $X_{\tau^{\varepsilon,x'}}^{\varepsilon,x'}$) converge en probabilité vers $\tau^{\varepsilon,x} \wedge n$ (resp. $X_{\tau^{\varepsilon,x}}^{\varepsilon,x}$), et ces variables aléatoires sont bornées, d'où la convergence dans L^1 (resp. L^2). $\square$

Lemme 4. *Pour tout $\varepsilon > 0$, la fonction de $\bar{D}$ dans $\mathbb{R}$ qui à x associe $\tilde{Y}_0^{\varepsilon,x}$ est continue.*

Démonstration du Lemme 4.

D'après Briand et Hu dans [2], il existe une constante C positive dépendant seulement de K et μ telle que pour $0 \leq t \leq n$,

$$\mathbb{E} \left[\left| \tilde{Y}_{t \wedge \tau^{\varepsilon,x}}^{\varepsilon,x} - \tilde{Y}_{t \wedge \tau^{\varepsilon,x}}^{n,\varepsilon,x} \right|^2 \right] \leq C^2 e^{-2\mu(n-t)}$$

En particulier

$$\left| \tilde{Y}_0^{\varepsilon,x} - \tilde{Y}_0^{n,\varepsilon,x} \right|^2 \leq C^2 e^{-2\mu n}$$

Par conséquent,

$$\begin{aligned}
\left| \tilde{Y}_0^{\varepsilon,x} - \tilde{Y}_0^{\varepsilon,x'} \right| &\leq \left| \tilde{Y}_0^{\varepsilon,x} - \tilde{Y}_0^{n,\varepsilon,x} \right| + \left| \tilde{Y}_0^{n,\varepsilon,x} - \tilde{Y}_0^{n,\varepsilon,x'} \right| + \left| \tilde{Y}_0^{\varepsilon,x'} - \tilde{Y}_0^{n,\varepsilon,x'} \right| \\
&\leq 2C e^{-\mu n} + \left| \tilde{Y}_0^{n,\varepsilon,x} - \tilde{Y}_0^{n,\varepsilon,x'} \right|
\end{aligned}$$

Si on fixe un $\gamma > 0$, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $|2C e^{-\mu n_0}| < \gamma$. Avec ce n_0 , la continuité de $\tilde{Y}_0^{n_0,\varepsilon,x}$ par rapport à x nous fournit un $\eta > 0$ tel que $|x - x'| < \eta$ implique $|\tilde{Y}_0^{n_0,\varepsilon,x} - \tilde{Y}_0^{n_0,\varepsilon,x'}| < \gamma$. Ainsi

$$\left| \tilde{Y}_0^{\varepsilon,x} - \tilde{Y}_0^{\varepsilon,x'} \right| \leq 2\gamma$$

$\tilde{Y}_0^{\varepsilon,x}$ est continue par rapport à x . $\square$

Il suffit alors d'écrire que :

$$u^\varepsilon(x) = \tilde{Y}_0^{\varepsilon,x} + \mathbb{E}[g(X_{\tau^{\varepsilon,x}}^{\varepsilon,x}) / \mathcal{F}_0]$$

$x \mapsto u^\varepsilon(x)$ est donc la somme de deux fonctions continues d'après les lemmes précédents et le Théorème 1.

u^ε est la solution de viscosité de (6)

La preuve est analogue à celles données sous des hypothèses différentes par exemple par Darling et Pardoux dans [4] ou par Pardoux dans [8].

De plus, sous nos hypothèses sur les coefficients a , β et f , il y a unicité de la solution de viscosité de l'EDP (6) avec des conditions aux limites de Dirichlet au sens classique. C'est principalement la conséquence de la monotonie stricte du générateur f . Nous renvoyons à l'article de Crandall, Ishii et Lions [3] pour les théorèmes d'existence et d'unicité de solutions de viscosité de telles EDP elliptiques.

3. Convergence uniforme de u^ε .

Soit $\mathcal{K}$ un compact de D . Soit $x \in \mathcal{K}$, et $\eta > 0$ fixé.

$$\begin{aligned} u^\varepsilon(x) - u(x) &= Y_0^{\varepsilon,x} - \psi_0^x \\ &= \tilde{Y}_0^{\varepsilon,x} + \mathbb{E}[g(X_{\tau^\varepsilon,x}^{\varepsilon,x})] - \tilde{\psi}_0^x - g(z^*) \\ &= \left(\tilde{Y}_0^{\varepsilon,x} - \tilde{Y}_0^{n,\varepsilon,x} \right) + \left(\tilde{Y}_0^{n,\varepsilon,x} - \tilde{\psi}_0^{n,x} \right) + \left(\tilde{\psi}_0^{n,x} - \tilde{\psi}_0^x \right) + (\mathbb{E}[g(X_{\tau^\varepsilon,x}^{\varepsilon,x})] - g(z^*)) \\ &= (a) + (b) + (c) + (d) \end{aligned}$$

où la fonction $\tilde{\psi}^x$ est définie dans le Théorème 4 et construite comme limite des fonctions $\tilde{\psi}^{n,x}$ dans la proposition 1.

Il s'agit donc de montrer la convergence dans le cas de conditions terminales nulles, et la convergence de $\mathbb{E}[g(X_{\tau^\varepsilon,x}^{\varepsilon,x})]$ vers $g(z^*)$.

$$|\mathbb{E}[g(X_{\tau^\varepsilon,x}^{\varepsilon,x})] - g(z^*)| \leq K \mathbb{E}[|X_{\tau^\varepsilon,x}^{\varepsilon,x} - z^*|]$$

Soit $\gamma > 0$ quelconque.

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[|X_{\tau^\varepsilon,x}^{\varepsilon,x} - z^*|] &= \mathbb{E}\left[|X_{\tau^\varepsilon,x}^{\varepsilon,x} - z^*| \mathbf{1}_{\{|X_{\tau^\varepsilon,x}^{\varepsilon,x} - z^*| < \gamma\}}\right] + \mathbb{E}\left[|X_{\tau^\varepsilon,x}^{\varepsilon,x} - z^*| \mathbf{1}_{\{|X_{\tau^\varepsilon,x}^{\varepsilon,x} - z^*| \geq \gamma\}}\right] \\ &\leq \gamma + 2 \sup_{a \in \partial D} |a| \mathbb{P}(|X_{\tau^\varepsilon,x}^{\varepsilon,x} - z^*| \geq \gamma) \\ \sup_{x \in \mathcal{K}} \mathbb{E}[|X_{\tau^\varepsilon,x}^{\varepsilon,x} - z^*|] &\leq \gamma + C \sup_{x \in \mathcal{K}} \mathbb{P}(|X_{\tau^\varepsilon,x}^{\varepsilon,x} - z^*| \geq \gamma) \end{aligned}$$

Donc

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \sup_{x \in \mathcal{K}} \mathbb{E}[|X_{\tau^\varepsilon,x}^{\varepsilon,x} - z^*|] = 0$$

Et par conséquent, $\mathbb{E}[g(X_{\tau^\varepsilon,x}^{\varepsilon,x})]$ converge vers $g(z^*)$ uniformément en $x \in \mathcal{K}$.

En outre,

$$\begin{aligned} |(a)| &= |\tilde{Y}_0^{\varepsilon,x} - \tilde{Y}_0^{n,\varepsilon,x}| \\ &\leq C e^{-\mu n} \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} |(c)| &= |\tilde{\psi}_0^{n,x} - \tilde{\psi}_0^x| \\ &\leq C e^{-\mu n} \end{aligned}$$

où la constante C est indépendante de n, ε, x (la première majoration est donnée dans [2], la seconde vient de la preuve de la proposition 1).

Donc par choix de n_0 indépendant de ε, x , le terme $|(a)| + |(c)|$ peut être rendu inférieur à η .

$(\tilde{\psi}_t^{n,x})_{t \in [0,n]}$ est solution de l'équation différentielle suivante sur $[0, n]$, que l'on regarde désormais comme une EDSR à coefficients déterministes :

$$\tilde{\psi}_t^{n,x} = \int_t^n h^x(s, \tilde{\psi}_s^{n,x}, 0) ds, \quad 0 \leq t \leq n$$

avec

$$h^x(t, y, z) = f(\varphi_t^x, y + g(z^*), z)$$

$(\tilde{Y}_t^{n,\varepsilon,x})_{t \in [0,n]}$ est solution de l'EDSR sur $[0, n]$

$$\tilde{Y}_t^{n,\varepsilon,x} = \int_t^n h^{\varepsilon,x}(s, \tilde{Y}_s^{n,\varepsilon,x}, \tilde{Z}_s^{n,\varepsilon,x}) ds - \int_t^n \tilde{Z}_s^{n,\varepsilon,x} dB_s, \quad 0 \leq t \leq n$$

avec

$$h^{\varepsilon,x}(t, y, z) = \mathbf{1}_{\{t \leq \tau^{\varepsilon,x}\}} f(X_t^{\varepsilon,x}, y + \mathbb{E}[g(X_{\tau^{\varepsilon,x}}^{\varepsilon,x})/\mathcal{F}_t], z + \eta_t^{\varepsilon,x})$$

h^x et $h^{\varepsilon,x}$ sont lipschitziennes en x, y, z et monotones en y avec les mêmes constantes que f .

On utilise encore les estimations sur les différences entre solutions. La constante c est fonction des constantes de Lipschitz et de monotonie de f , ainsi que de n , désormais fixé au n_0 choisi précédemment.

$$\begin{aligned} & \mathbb{E} \left[\sup_{0 \leq t \leq n} |\tilde{Y}_t^{n,\varepsilon,x} - \tilde{\psi}_t^{n,x}|^2 \right] \\ & \leq c \mathbb{E} \left[\int_0^n |h^x(s, \tilde{\psi}_s^{n,x}, 0) - h^{\varepsilon,x}(s, \tilde{\psi}_s^{n,x}, 0)|^2 ds \right] \\ & \leq c \mathbb{E} \left[\int_0^n |f(\varphi_s^x, \tilde{\psi}_s^{n,x} + g(z^*), 0) - \mathbf{1}_{\{s \leq \tau^{\varepsilon,x}\}} f(X_s^{\varepsilon,x}, \tilde{\psi}_s^{n,x} + \mathbb{E}[g(X_{\tau^{\varepsilon,x}}^{\varepsilon,x})/\mathcal{F}_s], \eta_s^{\varepsilon,x})|^2 ds \right] \\ & \leq 3cK^2 \mathbb{E} \left[\int_0^{n \wedge \tau^{\varepsilon,x}} \left(|\varphi_s^x - X_s^{\varepsilon,x}|^2 + |g(z^*) - \mathbb{E}[g(X_{\tau^{\varepsilon,x}}^{\varepsilon,x})/\mathcal{F}_s]|^2 + |\eta_s^{\varepsilon,x}|^2 \right) ds \right] \\ & \quad + c \mathbb{E} \left[\int_{n \wedge \tau^{\varepsilon,x}}^n |f(\varphi_s^x, \tilde{\psi}_s^{n,x} + g(z^*), 0)|^2 ds \right] \end{aligned}$$

Or,

$$\mathbb{E} \left[\sup_{0 \leq s \leq n} |\varphi_s^x - X_s^{\varepsilon,x}|^2 \right] \leq C(n)\varepsilon^2$$

où $C(n)$ est une constante indépendante de ε, x .

$$\begin{aligned}
\mathbb{E} \left[\int_0^{n \wedge \tau^{\varepsilon, x}} |\eta_s^{\varepsilon, x}|^2 ds \right] &\leq \mathbb{E} \left[\int_0^{\tau^{\varepsilon, x}} |\eta_s^{\varepsilon, x}|^2 ds \right] \\
&\leq \mathbb{E} \left[\left(\int_0^{\tau^{\varepsilon, x}} \eta_s^{\varepsilon, x} dB_s \right)^2 \right] \\
&\leq \mathbb{E} \left[(g(X_{\tau^{\varepsilon, x}}^{\varepsilon, x}) - \mathbb{E}[g(X_{\tau^{\varepsilon, x}}^{\varepsilon, x})])^2 \right] \\
&\leq \mathbb{E} \left[(g(X_{\tau^{\varepsilon, x}}^{\varepsilon, x}) - g(z^*) - \mathbb{E}[g(X_{\tau^{\varepsilon, x}}^{\varepsilon, x}) - g(z^*)])^2 \right] \\
&\leq 4\mathbb{E} \left[(g(X_{\tau^{\varepsilon, x}}^{\varepsilon, x}) - g(z^*))^2 \right]
\end{aligned}$$

Posons $U^{\varepsilon, x} = g(X_{\tau^{\varepsilon, x}}^{\varepsilon, x}) - g(z^*)$. Par le Théorème 3, comme g est lipschitzienne, on sait que $U^{\varepsilon, x}$ converge vers 0 en probabilité quand ε tend vers 0 uniformément en $x \in \mathcal{K}$. De plus $U^{\varepsilon, x}$ est uniformément borné car g est continue sur le compact $\bar{D}$. Par conséquent, $U^{\varepsilon, x}$ converge vers 0 dans L^2 uniformément en $x \in \mathcal{K}$, et donc

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \sup_{x \in \mathcal{K}} \mathbb{E} \left[\int_0^{n \wedge \tau^{\varepsilon, x}} |\eta_s^{\varepsilon, x}|^2 ds \right] = 0$$

Par ailleurs,

$$\begin{aligned}
|g(z^*) - \mathbb{E}[g(X_{\tau^{\varepsilon, x}}^{\varepsilon, x})/\mathcal{F}_s]| &= |\mathbb{E}[(g(z^*) - g(X_{\tau^{\varepsilon, x}}^{\varepsilon, x}))/\mathcal{F}_s]| \\
&\leq K \mathbb{E}[|z^* - X_{\tau^{\varepsilon, x}}^{\varepsilon, x}|/\mathcal{F}_s] \\
\mathbb{E} \left[\int_0^{n \wedge \tau^{\varepsilon, x}} |g(z^*) - \mathbb{E}[g(X_{\tau^{\varepsilon, x}}^{\varepsilon, x})/\mathcal{F}_s]|^2 ds \right] &\leq K^2 \int_0^n \mathbb{E} \left[\mathbb{E}[|z^* - X_{\tau^{\varepsilon, x}}^{\varepsilon, x}|^2/\mathcal{F}_s] \right] ds \\
&\leq K^2 \int_0^n \mathbb{E}[|z^* - X_{\tau^{\varepsilon, x}}^{\varepsilon, x}|^2] ds \\
&\leq nK^2 \mathbb{E}[|z^* - X_{\tau^{\varepsilon, x}}^{\varepsilon, x}|^2]
\end{aligned}$$

Ce terme aussi converge donc vers 0 uniformément en $x \in \mathcal{K}$.

Il reste à examiner $\mathbb{E} \left[\int_{n \wedge \tau^{\varepsilon, x}}^n |f(\varphi_s^x, \tilde{\psi}_s^{n, x} + g(z^*), 0)|^2 ds \right]$.

$\tilde{\psi}_s^{n, x}$ est uniformément bornée (cf. la preuve de la proposition 1), g est continue sur le compact $\bar{D}$, donc il existe une constante C indépendante de n, ε, x telle que

$$\begin{aligned}
\mathbb{E} \left[\int_{n \wedge \tau^{\varepsilon, x}}^n |f(\varphi_s^x, \tilde{\psi}_s^{n, x} + g(z^*), 0)|^2 ds \right] &\leq C \mathbb{E} \left[\int_{\tau^{\varepsilon, x}}^n ds \mathbb{1}_{\{\tau^{\varepsilon, x} \leq n\}} \right] \\
&\leq nC \mathbb{P}(\tau^{\varepsilon, x} \leq n)
\end{aligned}$$

Or, on a vu dans la première section que pour tout $T > 0$, $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \sup_{x \in \mathcal{K}} \mathbb{P}(\tau^{\varepsilon, x} < T) = 0$.

Par conséquent, $\mathbb{E} \left[\sup_{0 \leq t \leq n} |\tilde{Y}_t^{n, \varepsilon, x} - \tilde{\psi}_t^{n, x}|^2 \right]$ converge uniformément en $x \in \mathcal{K}$ vers 0, et finalement,

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \sup_{x \in \mathcal{K}} |u^\varepsilon(x) - u(x)| = 0$$

2. u est une solution de viscosité continue de (7).

C'est une conséquence d'un résultat de stabilité des solutions de viscosité ; on rappelle (cf. par exemple Fleming et Soner dans [6]) le résultat suivant : si u^ε est solution de viscosité dans D d'une EDP elliptique

$$G^\varepsilon(x, u^\varepsilon(x), Du^\varepsilon(x), D^2u^\varepsilon(x)) = 0$$

et si u^ε converge vers une fonction u uniformément sur tout compact, si G^ε converge vers une fonction G uniformément sur tout compact, alors u est solution de viscosité dans D de

$$G(x, u(x), Du(x), D^2u(x)) = 0$$

On a déjà vu la convergence uniforme compacte des fonctions u^ε .

Pour tout (x, u, p, X) dans $\mathbb{R}^d \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d \times \mathcal{S}_d$, on a ici :

$$\begin{aligned} G^\varepsilon(x, u, p, X) &= -\langle \beta(x), p \rangle - \frac{\varepsilon^2}{2} \text{Tr}(a(x)X) - f(x, u, \varepsilon p \sigma(x)) \\ G(x, u, p, X) &= -\langle \beta(x), p \rangle - f(x, u, 0) \end{aligned}$$

Par conséquent

$$\begin{aligned} |G^\varepsilon(x, u, p, X) - G(x, u, p, X)| &\leq \left| \frac{\varepsilon^2}{2} \text{Tr}(a(x)X) \right| + |f(x, u, \varepsilon p \sigma(x)) - f(x, u, 0)| \\ &\leq \frac{\varepsilon^2}{2} |\text{Tr}(a(x)X)| + K |p \sigma(x)| \varepsilon \end{aligned}$$

On a donc aussi la convergence uniforme compacte des fonctions G^ε .

Quant à la condition $u(x^*) = g(z^*)$, elle a déjà été vérifiée (Corollaire 1), et u est continue d'après le Théorème 4.

4. (i) On montre facilement, en utilisant la formule d'Itô, que si v^ε est une solution de classe $\mathcal{C}^2$ de (6), à dérivées bornées, alors $(v^\varepsilon(X_t^{\varepsilon, x}), \varepsilon(\nabla v^\varepsilon \sigma)(X_t^{\varepsilon, x}))_{t \in [0, \tau^{\varepsilon, x}]}$ fournit une solution de l'EDSR (3), et donc v^ε coïncide avec la fonction u^ε .

4. (ii) *Unicité d'une solution classique de (7).*

Soit $v : D \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$, solution de (7), telle que $v(x^*) = g(z^*)$. Soit $x \in D$ fixé. On étudie alors la fonction $\psi : [0, \infty[\rightarrow \mathbb{R}^d$, $t \mapsto v(\varphi_t^x)$. Par continuité de v , elle converge quand t tend vers l'infini vers $v(x^*) = g(z^*)$. Calculons sa dérivée par rapport à t :

$$\begin{aligned} \psi'_t &= \sum_{i=1}^d \frac{\partial v}{\partial x_i}(\varphi_t^x) \frac{\partial (\varphi_t^x)_i}{\partial t} \\ &= \sum_{i=1}^d \frac{\partial v}{\partial x_i}(\varphi_t^x) \beta_i(\varphi_t^x) \end{aligned}$$

$$\psi'_t = -f(\varphi_t^x, v(\varphi_t^x), 0) = -f(\varphi_t^x, \psi_t, 0)$$

Donc ψ est la solution ψ^x de l'équation différentielle rétrograde (4). Par conséquent,

$$v(x) = v(\varphi_0^x) = \psi_0^x = u(x)$$

Réciproquement, si la fonction u définie précédemment par $u(x) = \psi_0^x$ est de classe $\mathcal{C}^1$, on vérifie facilement en dérivant l'égalité de la proposition 3 qu'elle est solution de l'équation (7). $\square$

Nous allons maintenant donner des conditions supplémentaires qui permettent d'obtenir la continue différentiabilité de la fonction u , et sous lesquelles on dispose donc d'un théorème d'existence et d'unicité d'une solution classique pour l'EDP (7).

Hypothèse 5. *Outre les hypothèses 3 et 4, on suppose que :*

- β est de classe $\mathcal{C}^1$.
- f est de classe $\mathcal{C}^1$ en les variables x et y , et pour tout $i \in \mathbb{N}_d$, $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ est K -lipschitzienne en y , de même que $\frac{\partial f}{\partial y}$.

Proposition 4. *Sous l'hypothèse 5, la fonction u définie par $u(x) = \psi_0^x$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur D . Il y a donc existence et unicité d'une solution $\mathcal{C}^1$ pour l'EDP (7), donnée par la fonction u .*

Démonstration.

Commençons par quelques propriétés qui se déduisent des hypothèses 4 et 5.

La solution φ_t^x de l'équation (2) est de classe $\mathcal{C}^1$ en x sur D et $\mathcal{C}^2$ en t . Pour tout $i \in \mathbb{N}_d$, soit $z_i(t, x) = \frac{\partial \varphi_t^x}{\partial x_i}$. Montrons que $|z_i(t, x)| \leq e^{-\alpha t}$ pour tout $x \in D$, tout $t \geq 0$.

Lemme 5. *Soient x, x' dans D . Alors,*

$$\left| \varphi_t^x - \varphi_t^{x'} \right| \leq |x - x'| e^{-\alpha t}$$

où α est la constante de monotonie de β (hypothèse 2).

Preuve du Lemme 5.

On pose $\pi_t = \varphi_t^x - \varphi_t^{x'}$. Alors, par monotonie de β ,

$$\begin{aligned} \pi_t' &= \beta(\varphi_t^x) - \beta(\varphi_t^{x'}) \\ \frac{1}{2} \frac{d}{dt} |\pi_t|^2 &= \langle \pi_t, \pi_t' \rangle \leq -\alpha |\pi_t|^2 \\ \text{donc } |\pi_t|^2 &\leq |x - x'|^2 e^{-2\alpha t} \end{aligned}$$

$\square$

En l'appliquant en $x' = x + h e_i$, on en déduit que $|z_i(t, x)| \leq e^{-\alpha t}$.

Par ailleurs, la monotonie de f en y implique que pour tous x, y :

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y, 0) \leq -\mu$$

Enfin, comme f est K -lipschitzienne en x et y , on a pour tout $i \in \mathbb{N}_d$, tout (x, y) :

$$\left| \frac{\partial f}{\partial x_i}(x, y, 0) \right| \leq K, \quad \left| \frac{\partial f}{\partial y}(x, y, 0) \right| \leq K$$

Nous allons prouver la proposition dans le cas où la condition terminale $g(z^*)$ est nulle. Le cas général s'en déduit très facilement (comme pour la démonstration du Théorème 4). Nous reprenons les notations de la preuve de la proposition 1.

La fonction $\psi^{n,x}$, solution sur $[0, n]$ de $\psi'_t = -f(\varphi_t^x, \psi_t, 0)$, $\psi_n = 0$ est désormais de classe $\mathcal{C}^2$ en t , $\mathcal{C}^1$ en x . Soit, pour tout $0 \leq t \leq n$:

$$w_i^n(t, x) = \frac{\partial \psi_t^{n,x}}{\partial x_i}$$

On prolonge $w_i^n(t, x)$ par 0 pour $t \geq n$. On obtient ainsi une fonction continue en (t, x) .

$$w_i^n(t, x) = \int_t^n \nabla_x f(\varphi_s^x, \psi_s^{n,x}, 0) z_i(s, x) ds + \int_t^n \frac{\partial f}{\partial y}(\varphi_s^x, \psi_s^{n,x}, 0) w_i^n(s, x) ds$$

w_i^n est solution d'une équation différentielle linéaire qui se résout en :

$$w_i^n(t, x) = \int_t^n \nabla_x f(\varphi_s^x, \psi_s^{n,x}, 0) z_i(s, x) \exp \left\{ \int_t^s \frac{\partial f}{\partial y}(\varphi_r^x, \psi_r^{n,x}, 0) dr \right\} ds$$

Nous allons prouver que w_i^n converge vers une fonction w_i , uniformément en x , uniformément en t sur tout compact. On en déduira que ψ^x est de classe $\mathcal{C}^1$ en x , de dérivée w_i par rapport à x_i . Soit w_i définie par, pour tous $t \geq 0$, $x \in D$:

$$w_i(t, x) = \int_t^\infty \nabla_x f(\varphi_s^x, \psi_s^x, 0) z_i(s, x) \exp \left\{ \int_t^s \frac{\partial f}{\partial y}(\varphi_r^x, \psi_r^x, 0) dr \right\} ds$$

w_i est bien définie car

$$\begin{aligned} \left| \nabla_x f(\varphi_s^x, \psi_s^x, 0) z_i(s, x) \exp \left\{ \int_t^s \frac{\partial f}{\partial y}(\varphi_r^x, \psi_r^x, 0) dr \right\} \right| &\leq |\nabla_x f(\varphi_s^x, \psi_s^x, 0)| e^{-\alpha s} e^{-\mu(s-t)} \\ &\leq K e^{-\alpha s} e^{-\mu(s-t)} \end{aligned}$$

et cette dernière fonction est intégrable sur $[t, \infty[$.

Pour tout $0 \leq t \leq n$,

$$\begin{aligned} w_i(t, x) - w_i^n(t, x) &= \int_t^\infty \nabla_x f(\varphi_s^x, \psi_s^x, 0) z_i(s, x) \exp \left\{ \int_t^s \frac{\partial f}{\partial y}(\varphi_r^x, \psi_r^x, 0) dr \right\} ds \\ &\quad - \int_t^n \nabla_x f(\varphi_s^x, \psi_s^{n,x}, 0) z_i(s, x) \exp \left\{ \int_t^s \frac{\partial f}{\partial y}(\varphi_r^x, \psi_r^{n,x}, 0) dr \right\} ds \\ &= \int_n^\infty \nabla_x f(\varphi_s^x, \psi_s^x, 0) z_i(s, x) \exp \left\{ \int_t^s \frac{\partial f}{\partial y}(\varphi_r^x, \psi_r^x, 0) dr \right\} ds \\ &\quad + \int_t^n (\nabla_x f(\varphi_s^x, \psi_s^x, 0) - \nabla_x f(\varphi_s^x, \psi_s^{n,x}, 0)) z_i(s, x) \exp \left\{ \int_t^s \frac{\partial f}{\partial y}(\varphi_r^x, \psi_r^x, 0) dr \right\} ds \\ &\quad + \int_t^n \nabla_x f(\varphi_s^x, \psi_s^{n,x}, 0) z_i(s, x) \left(e^{\int_t^s \frac{\partial f}{\partial y}(\varphi_r^x, \psi_r^x, 0) dr} - e^{\int_t^s \frac{\partial f}{\partial y}(\varphi_r^x, \psi_r^{n,x}, 0) dr} \right) ds \\ &= (1) + (2) + (3) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
|(1)| &\leq \int_n^\infty K e^{-\alpha s} e^{-\mu(s-t)} ds \\
&\leq \frac{K}{\alpha + \mu} e^{\mu t} e^{-(\alpha + \mu)n} \\
&\leq \frac{K}{\alpha + \mu} e^{-\alpha n}
\end{aligned}$$

Ce terme tend vers 0 quand n tend vers l'infini, uniformément en t et en x .

En utilisant les majorations obtenues dans la preuve de la proposition 1, on a :

$$\begin{aligned}
|(2)| &\leq K \int_t^n |\psi_s^x - \psi_s^{n,x}| e^{-\alpha s} e^{-\mu(s-t)} ds \\
&\leq K \int_t^n \frac{K}{\mu} e^{\mu s} e^{-\mu n} e^{-\alpha s} e^{-\mu(s-t)} ds \\
&\leq \frac{K^2}{\mu} e^{\mu(t-n)} \int_t^n e^{-\alpha s} ds \\
&\leq \frac{K^2}{\mu \alpha} e^{(\mu - \alpha)t} e^{-\mu n}
\end{aligned}$$

Ce terme tend vers 0 quand n tend vers l'infini, uniformément en t sur tout compact, et uniformément en x .

Pour majorer $|(3)|$, on remarque que $\int_t^s \frac{\partial f}{\partial y}(\varphi_r^x, \psi_r^x, 0) dr$ et $\int_t^s \frac{\partial f}{\partial y}(\varphi_r^x, \psi_r^{n,x}, 0) dr$ sont inférieurs à $-\mu(s-t)$, donc négatifs, d'où

$$\begin{aligned}
&\left| \exp \left(\int_t^s \frac{\partial f}{\partial y}(\varphi_r^x, \psi_r^x, 0) dr \right) - \exp \left(\int_t^s \frac{\partial f}{\partial y}(\varphi_r^x, \psi_r^{n,x}, 0) dr \right) \right| \\
&\leq \int_t^s \left| \frac{\partial f}{\partial y}(\varphi_r^x, \psi_r^x, 0) - \frac{\partial f}{\partial y}(\varphi_r^x, \psi_r^{n,x}, 0) \right| dr \\
&\leq K \int_t^s |\psi_r^x - \psi_r^{n,x}| dr \\
&\leq \frac{K^2}{\mu} \int_t^s e^{\mu r} e^{-\mu n} dr \\
&\leq \frac{K^2}{\mu^2} e^{-\mu n} (e^{\mu s} - e^{\mu t})
\end{aligned}$$

Par suite, si $\alpha = \mu$,

$$\begin{aligned}
|(3)| &\leq \int_t^n K e^{-\alpha s} \frac{K^2}{\mu^2} e^{-\mu n} e^{\mu s} ds \\
&\leq \frac{K^3}{\mu^2} (n - t) e^{-\mu n}
\end{aligned}$$

Et si $\alpha \neq \mu$,

$$\begin{aligned}
|(3)| &\leq \int_t^n K e^{-\alpha s} \frac{K^2}{\mu^2} e^{-\mu n} (e^{\mu s} - e^{\mu t}) ds \\
&\leq \frac{K^3}{\mu^2} e^{-\mu n} \left(\frac{e^{(\mu-\alpha)n} - e^{(\mu-\alpha)t}}{\mu - \alpha} + e^{\mu t} \frac{e^{-\alpha n} - e^{-\alpha t}}{\alpha} \right) \\
&\leq \frac{K^3}{\mu^2(\mu - \alpha)} \left(e^{-\alpha n} - e^{(\mu-\alpha)t} e^{-\mu n} \right) + \frac{K^3}{\mu^2 \alpha} e^{\mu t} e^{-(\mu+\alpha)n} \\
&\leq \frac{K^3}{\mu^2(\mu - \alpha)} \left(e^{-\alpha n} - e^{(\mu-\alpha)t} e^{-\mu n} \right) + \frac{K^3}{\mu^2 \alpha} e^{-\alpha n}
\end{aligned}$$

Si $\mu > \alpha$,

$$|(3)| \leq \frac{K^3}{\mu^2(\mu - \alpha)} e^{-\alpha n} + \frac{K^3}{\mu^2 \alpha} e^{-\alpha n}$$

Si $\alpha > \mu$,

$$|(3)| \leq \frac{K^3}{\mu^2(\alpha - \mu)} e^{(\mu-\alpha)t} e^{-\mu n} + \frac{K^3}{\mu^2 \alpha} e^{-\alpha n}$$

Dans tous les cas, le troisième terme converge vers 0 uniformément en x , uniformément en t sur tout compact, quand n tend vers l'infini.

□

4 Convergence et principe de grandes déviations pour la solution de l'équation rétrograde

Dans toute cette section, on suppose que les hypothèses 3 et 4 sont vérifiées.

4.1 Espaces de trajectoires explosives

Dans la suite, nous nous intéresserons parfois uniquement au comportement des trajectoires à l'intérieur de D , c'est-à-dire que nous les « tuons » au temps de sortie $\tau^{\varepsilon, x}$. Pour ce faire, nous utiliserons les espaces $\mathcal{E}(D)$ définis ci-dessous, appelés espaces de trajectoires explosives.

Définition 6. On compactifie l'ouvert D à l'aide du point à l'infini δ .

Pour $T > 0$ fixé, on définit l'espace des trajectoires explosives par

$$\begin{aligned}
\mathcal{E}(D) &:= \{ \varphi : [0, T] \rightarrow D \cup \{\delta\}, \text{ continue et vérifiant :} \\
&\quad \text{si } \exists t_0 \in [0, T], \varphi_{t_0} = \delta, \text{ alors } \varphi_t = \delta \ \forall t \in [t_0, T] \}
\end{aligned}$$

Pour une fonction φ dans $\mathcal{E}(D)$, on définit son temps d'explosion par :

$$\tau(\varphi) := \inf \{ t \in [0, T], \varphi_t = \delta \}$$

avec la convention habituelle $\inf \emptyset = +\infty$.

On munit l'espace $\mathcal{E}(D)$ de la notion de convergence suivante : on dit qu'une suite $(\varphi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'éléments de $\mathcal{E}(D)$ converge vers $\varphi \in \mathcal{E}(D)$, de temps d'explosion $\tau(\varphi) > 0$, si pour tout $t_0 \in [0, \tau(\varphi)[$, $t_0 \leq T$, φ_n converge uniformément vers φ sur $[0, t_0]$. En particulier, on a $\tau(\varphi) \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \tau(\varphi_n)$. Si $\tau(\varphi) = 0$, on dit que φ_n converge vers φ si $\varphi_n = \varphi$ à partir d'un certain rang.

$\mathcal{E}(D)$ est alors un espace topologique séparé à base dénombrable.

Soit $\varphi \in \mathcal{E}(D)$. Si $\tau(\varphi) > 0$, une base de voisinages de $\varphi \in \mathcal{E}(D)$ est de la forme :

$$V_{t,\eta}(\varphi) = \left\{ \nu \in \mathcal{E}(D), \sup_{s \in [0,t]} |\nu_s - \varphi_s| < \eta \right\}$$

où $\eta > 0$, et $t \in [0, \tau(\varphi)[$, $t \leq T$.

Si $\tau(\varphi) = 0$, φ est un point isolé.

On définit aussi les espaces de fonctions :

$$H^1([0, t_0], D) := \left\{ \varphi \in \mathcal{C}([0, t_0], D) : \exists \dot{\varphi} \in L^2/\varphi_t = \varphi_0 + \int_0^t \dot{\varphi}_s ds, \quad \forall t \in [0, t_0] \right\}$$

$$\mathcal{E}^0(D) := \left\{ \varphi \in \mathcal{E}(D) : \tau(\varphi) > 0, \forall t_0 < \tau(\varphi), t_0 \leq T, \varphi|_{[0, t_0]} \in H^1([0, t_0], D) \right\}$$

et pour $x \in D$,

$$\mathcal{E}_x(D) := \{ \varphi \in \mathcal{E}(D) : \varphi_0 = x \}$$

On remarquera que les fonctions de $\mathcal{E}^0(D)$ et $\mathcal{E}_x(D)$ ont des temps d'explosion strictement positifs.

Suivant Azencott ([1]), on considérera dans la suite la solution de notre EDS, de condition initiale $x \in D$, comme une variable aléatoire $(\mathfrak{X}_t^{\varepsilon, x})_{t \in [0, T]}$ à valeurs dans l'espace $\mathcal{E}(D)$. Pour tout $t \in [0, T]$, définissons :

$$\mathfrak{X}_t^{\varepsilon, x} := \begin{cases} X_t^{\varepsilon, x}, & \text{si } t < \tau^{\varepsilon, x}; \\ \delta, & \text{sinon.} \end{cases}$$

Pour presque tout $\omega \in \Omega$, $\mathfrak{X}^{\varepsilon, x}(\omega)$ est alors un élément de $\mathcal{E}(D)$ de temps d'explosion égal à $\tau^{\varepsilon, x}(\omega) \mathbb{1}_{\{\tau^{\varepsilon, x}(\omega) \leq T\}} + \infty \mathbb{1}_{\{\tau^{\varepsilon, x}(\omega) > T\}}$.

Sous l'hypothèse 3, quel que soit $x \in D$, l'application $(\varphi_t^x)_{t \in [0, T]}$, solution de l'équation déterministe limite (2) sur $[0, T]$, est dans $\mathcal{E}(D)$, de temps d'explosion infini.

Nous allons rappeler le principe de grandes déviations vérifié par $\mathfrak{X}^{\varepsilon, x}$ dans l'espace des trajectoires explosives, dû à Azencott ([1]), avec la fonctionnelle de taux $\lambda = \lambda_x : \mathcal{E}(D) \rightarrow [0, \infty]$ définie par

$$\lambda_x(\varphi) := \begin{cases} \frac{1}{2} \int_0^{T \wedge \tau(\varphi)} Q_{\varphi_t}^* [\dot{\varphi}_t - \beta(\varphi_t)] dt, & \text{si } \varphi \in \mathcal{E}^0(D) \cap \mathcal{E}_x(D); \\ +\infty, & \text{sinon.} \end{cases}$$

où pour tout $v \in \mathbb{R}^d$, $Q_{\varphi_t}^*(v) = \langle v, a^{-1}(\varphi_t)v \rangle$ où $a = \sigma\sigma^*$.

On pose aussi pour tout A borélien de $\mathcal{E}(D)$:

$$\Lambda(A) := \inf \{ \lambda(\varphi), \varphi \in A \}$$

Théorème 6. *Sous l'hypothèse 1, pour tout $x \in D$, tout borélien A de l'espace $\mathcal{E}_x(D)$,*

$$-\Lambda \left(\overset{\circ}{A} \right) \leq \liminf_{\varepsilon \rightarrow 0} \varepsilon^2 \ln \mathbb{P}(\mathfrak{X}^{\varepsilon, x} \in A) \leq \limsup_{\varepsilon \rightarrow 0} \varepsilon^2 \ln \mathbb{P}(\mathfrak{X}^{\varepsilon, x} \in A) \leq -\Lambda(\overline{A})$$

4.2 Définition des fonctionnelles permettant d'exprimer les solutions rétro-grades en fonction des solutions directes

On s'intéresse seulement au comportement de $Y_t^{\varepsilon, x}$ pour des temps t inférieurs à $\tau^{\varepsilon, x}$. On va donc le « tuer » en ce temps de sortie selon un procédé similaire à celui utilisé pour la solution de l'équation progressive : soit le processus $(\mathcal{Y}_t^{\varepsilon, x})_{t \in [0, T]}$ défini par :

$$\mathcal{Y}_t^{\varepsilon, x} := \begin{cases} Y_t^{\varepsilon, x}, & \text{si } t < \tau^{\varepsilon, x}; \\ \hat{\delta}, & \text{sinon.} \end{cases}$$

où $\hat{\delta}$ désigne le point à l'infini de $\mathbb{R}$. La principale différence avec ce qui a été fait pour la diffusion est que le processus $\mathcal{Y}^{\varepsilon, x}$ n'est pas continu à gauche en $\tau^{\varepsilon, x}$. On va donc définir un espace de trajectoires explosives légèrement différent.

Définition 7. *Pour $T > 0$ fixé, on définit l'espace des trajectoires explosives sur $\mathbb{R}$, $\mathcal{E}(\mathbb{R})$, par*

$$\begin{aligned} \mathcal{E}(\mathbb{R}) &:= \{ \psi : [0, T] \rightarrow \mathbb{R} \cup \{\hat{\delta}\}, \text{ vérifiant : soit } \psi \text{ continue de } [0, T] \text{ dans } \mathbb{R}, \\ &\quad \text{soit } \exists t_0 \in [0, T], \forall t \in [t_0, T], \psi_t = \hat{\delta}, \text{ et } \psi \text{ continue de } [0, t_0[\text{ dans } \mathbb{R} \} \end{aligned}$$

Pour une fonction ψ dans $\mathcal{E}(\mathbb{R})$, on définit son temps d'explosion par :

$$\tau(\psi) := \inf \left\{ t \in [0, T], \psi_t = \hat{\delta} \right\}$$

avec la convention habituelle $\inf \emptyset = +\infty$.

On munit l'espace $\mathcal{E}(\mathbb{R})$ de la même notion de convergence que $\mathcal{E}(D)$, et des mêmes voisinages.

On peut alors considérer le processus $\mathcal{Y}^{\varepsilon, x}$ comme une variable aléatoire à valeurs dans $\mathcal{E}(\mathbb{R})$, de temps d'explosion $\tau^{\varepsilon, x} \mathbf{1}_{\{\tau^{\varepsilon, x} \leq T\}} + \infty \mathbf{1}_{\{\tau^{\varepsilon, x} > T\}}$.

De même, la restriction à $[0, T]$, $(\psi_t^x)_{t \in [0, T]}$, de la solution de (4) peut être regardée comme un élément de $\mathcal{E}(\mathbb{R})$, de temps d'explosion infini.

Définition 8. *En notant $u = u^0$, on définit pour tout $\varepsilon \geq 0$ une application $v^\varepsilon : D \cup \{\delta\} \rightarrow \mathbb{R} \cup \{\hat{\delta}\}$ par*

$$\begin{cases} v^\varepsilon(x) &= u^\varepsilon(x) \quad \text{si } x \in D, \\ v^\varepsilon(\delta) &= \hat{\delta}. \end{cases}$$

où les fonctions u^ε et u sont celles des définitions 2 et 3.

On considérera aussi la fonctionnelle $F^\varepsilon : \mathcal{E}(D) \rightarrow \mathcal{E}(\mathbb{R})$ définie pour $\varphi \in \mathcal{E}(D)$ par

$$F^\varepsilon(\varphi)(t) = v^\varepsilon(\varphi_t), \quad \forall t \in [0, T]$$

Par construction de v^ε et F^ε , on voit que pour toute fonction φ de $\mathcal{E}(D)$,

$$\tau(F^\varepsilon(\varphi)) = \tau(\varphi)$$

Lemme 6. *Pour tout $x \in D$, tout $\varepsilon > 0$,*

$$\mathcal{Y}^{\varepsilon,x} = F^\varepsilon(\mathfrak{X}^{\varepsilon,x})$$

Démonstration.

Ce lemme se déduit de la proposition 2.

Si $0 \leq t < \tau^{\varepsilon,x}$, on a

$$\mathcal{Y}_t^{\varepsilon,x} = Y_t^{\varepsilon,x} = u^\varepsilon(X_t^{\varepsilon,x}) = u^\varepsilon(\mathfrak{X}_t^{\varepsilon,x}) = v^\varepsilon(\mathfrak{X}_t^{\varepsilon,x})$$

et si $t \geq \tau^{\varepsilon,x}$,

$$\mathcal{Y}_t^{\varepsilon,x} = \hat{\delta} = v^\varepsilon(\delta) = v^\varepsilon(\mathfrak{X}_t^{\varepsilon,x})$$

□

Lemme 7. *Pour tout $x \in D$,*

$$(\psi_t^x)_{t \in [0,T]} = F((\varphi_t^x)_{t \in [0,T]})$$

Démonstration.

Ce lemme se déduit de la proposition 3. En effet, pour tout $x \in D$, $\tau(\varphi^x) = +\infty$, donc $\psi_t^x = u(\varphi_t^x) = v(\varphi_t^x)$ pour tout $t \geq 0$.

□

Nous terminons cette sous-section par l'étude de la continuité des fonctionnelles que nous venons de définir. On pose $F := F^0$.

Lemme 8. *Pour tout $\varepsilon \geq 0$, F^ε est continue sur $\mathcal{E}(D)$.*

Démonstration.

Soit $\varphi \in \mathcal{E}(D)$, montrons la continuité de F^ε en φ .

On suppose d'abord que $\tau(\varphi) > 0$. Soit $\eta > 0$, et $t_0 \in [0, T]$, $t_0 < \tau(\varphi)$. Pour tout $t \in [0, t_0]$,

$$F^\varepsilon(\varphi)(t) = v^\varepsilon(\varphi_t) = u^\varepsilon(\varphi_t)$$

$\{\varphi_t, t \in [0, t_0]\} := \mathcal{L}$ est un compact de D . Soit $\gamma_0 > 0$ et $\mathcal{K}$ un compact de D tels que

$$\mathcal{L}^{\gamma_0} := \left\{ x \in \mathbb{R}^d, d(x, \mathcal{L}) \leq \gamma_0 \right\} \subset \mathcal{K}$$

u^ε est continue sur $\mathcal{K}$ donc uniformément continue. Il existe $\gamma > 0$, que l'on peut choisir inférieur à γ_0 , tel que si $(z, z') \in \mathcal{K}^2$, $|z - z'| < \gamma$, alors $|u^\varepsilon(z) - u^\varepsilon(z')| < \eta$.

Soit $\nu \in V_{t_0, \gamma}(\varphi) = \{\psi \in \mathcal{E}(D) : |\psi - \varphi|_{[0, t_0]} < \gamma\}$. En particulier, $\tau(\nu) > t_0$.

Pour tout $t \in [0, t_0]$, ν_t et φ_t sont dans $\mathcal{K}$, donc

$$\begin{aligned} |F^\varepsilon(\nu)(t) - F^\varepsilon(\varphi)(t)| &= |u^\varepsilon(\nu_t) - u^\varepsilon(\varphi_t)| \\ &< \eta \end{aligned}$$

On a donc trouvé $\gamma > 0$ tel que $F^\varepsilon(V_{t_0, \gamma}(\varphi)) \subset V_{t_0, \eta}(F^\varepsilon(\varphi))$.

D'autre part, si $\tau(\varphi) = 0$, alors φ et $F^\varepsilon(\varphi)$ sont les applications constantes respectivement égales à δ et $\hat{\delta}$. Le seul voisinage de φ est $\{\varphi\}$, et le seul voisinage de $F^\varepsilon(\varphi)$ est $\{F^\varepsilon(\varphi)\}$, donc la continuité est immédiate.

□

4.3 Convergence de la solution de l'équation rétrograde

Nous allons déduire la convergence en probabilité du processus $(Y_t^{\varepsilon,x})_{t \in [0,T]}$ vers la fonction $(\psi_t^x)_{t \in [0,T]}$ dans $\mathcal{C}([0,T], \mathbb{R})$ de la convergence uniforme sur tout compact de la fonction u^ε vers u . Nous prouverons aussi que le processus « tué » $(\mathcal{Y}_t^{\varepsilon,x})_{t \in [0,T]}$ converge vers cette même fonction dans l'espace des trajectoires explosives $\mathcal{E}(\mathbb{R})$, en vérifiant un principe de grandes déviations.

Lemme 9. *Pour toute fonction $\varphi \in \mathcal{E}(D)$, telle que $\tau(\varphi) > 0$, tout $\eta > 0$, tout $t_0 < \tau(\varphi)$, $0 \leq t_0 \leq T$, il existe $\gamma > 0$, $\varepsilon_0 > 0$ tels que si $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0$, alors*

$$F^\varepsilon(V_{t_0,\gamma}(\varphi)) \subset V_{t_0,\eta}(F(\varphi))$$

Démonstration.

Soit $\mathcal{K}$ un compact de D contenant strictement $\varphi([0, t_0])$. Il existe γ_0 tel que pour tout $\nu \in V_{t_0,\gamma_0}(\varphi)$, on ait $\nu([0, t_0]) \subset \mathcal{K}$.

u est continue sur D donc uniformément continue sur $\mathcal{K}$. Il existe $0 < \gamma \leq \gamma_0$ tel que si $(z, z') \in \mathcal{K}^2$, $|z - z'| < \gamma$, alors $|u(z) - u(z')| < \frac{\eta}{2}$.

u^ε converge uniformément vers u sur le compact $\mathcal{K}$ donc il existe ε_0 tel que pour tout $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0$, $\sup_{z \in \mathcal{K}} |u^\varepsilon(z) - u(z)| < \frac{\eta}{2}$.

Soit $\nu \in V_{t_0,\gamma}(\varphi)$. En particulier, $\tau(\nu) > t_0$, et donc aussi $\tau(F^\varepsilon(\nu)) = \tau(\nu) > t_0$, d'où pour tout $t \in [0, t_0]$,

$$\begin{aligned} |F^\varepsilon(\nu)(t) - F(\varphi)(t)| &= |u^\varepsilon(\nu_t) - u(\varphi_t)| \\ &\leq |u^\varepsilon(\nu_t) - u(\nu_t)| + |u(\nu_t) - u(\varphi_t)| \\ &\leq \frac{\eta}{2} + \frac{\eta}{2} \end{aligned}$$

$$F^\varepsilon(\nu) \in V_{t_0,\eta}(F(\varphi)).$$

□

Nous pouvons en déduire la convergence en probabilité de $(Y_t^{\varepsilon,x})_{t \in [0,T]}$ vers $(\psi_t^x)_{t \in [0,T]}$, pour tout $T > 0$:

Théorème 7. *Sous les hypothèses 3 et 4, pour tout $\eta > 0$, tout $T > 0$, tout $x \in D$,*

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \mathbb{P} \left(\sup_{t \in [0,T]} |Y_t^{\varepsilon,x} - \psi_t^x| > \eta \right) = 0$$

Démonstration.

Soit $\rho > 0$, et $\eta > 0$. $\tau(\varphi^x) = +\infty$ donc d'après le lemme précédent, il existe $\gamma > 0$, $\varepsilon_0 > 0$ tels que si $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0$,

$$F^\varepsilon(V_{T,\gamma}(\varphi^x)) \subset V_{T,\eta}(\psi^x)$$

Par convergence en probabilité de $(X_t^{\varepsilon,x})_{t \in [0,T]}$ vers $(\varphi_t^x)_{t \in [0,T]}$ et de $\tau^{\varepsilon,x}$ vers l'infini (cf. la section 1), il existe alors $0 < \varepsilon_1 \leq \varepsilon_0$ tel que si $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_1$,

$$\begin{aligned} \mathbb{P} \left(\sup_{t \in [0,T]} |X_t^{\varepsilon,x} - \varphi_t^x| > \gamma \right) &< \frac{\rho}{2} \\ \mathbb{P}(\tau^{\varepsilon,x} < T) &< \frac{\rho}{2} \end{aligned}$$

Par conséquent,

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(\mathfrak{X}^{\varepsilon,x} \in V_{T,\gamma}(\varphi^x)) &= \mathbb{P}\left(\sup_{t \in [0,T]} |X_t^{\varepsilon,x} - \varphi_t^x| < \gamma, \tau^{\varepsilon,x} > T\right) \\
&= \mathbb{P}\left(\sup_{t \in [0,T]} |X_t^{\varepsilon,x} - \varphi_t^x| < \gamma\right) - \mathbb{P}\left(\sup_{t \in [0,T]} |X_t^{\varepsilon,x} - \varphi_t^x| < \gamma, \tau^{\varepsilon,x} \leq T\right) \\
&\geq 1 - \frac{\rho}{2} - \frac{\rho}{2} = 1 - \rho
\end{aligned}$$

Et donc

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(\mathcal{Y}^{\varepsilon,x} \in V_{T,\eta}(\psi^x)) &\geq \mathbb{P}(\mathcal{Y}^{\varepsilon,x} \in F^\varepsilon(V_{T,\gamma}(\varphi^x))) \\
&\geq \mathbb{P}(\mathfrak{X}^{\varepsilon,x} \in V_{T,\gamma}(\varphi^x)) \\
&\geq 1 - \rho
\end{aligned}$$

$\mathcal{Y}^{\varepsilon,x}$ converge donc en probabilité vers $(\psi_t^x)_{t \in [0,T]}$ dans $\mathcal{E}(\mathbb{R})$.

Enfin,

$$\{\mathcal{Y}^{\varepsilon,x} \in V_{T,\eta}(\psi^x)\} = \{T < \tau^{\varepsilon,x}\} \cap \left\{ \sup_{t \in [0,T]} |Y_t^{\varepsilon,x} - \psi_t^x| < \eta \right\}$$

Donc

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\left(\sup_{t \in [0,T]} |Y_t^{\varepsilon,x} - \psi_t^x| < \eta\right) &\geq \mathbb{P}(\mathcal{Y}^{\varepsilon,x} \in V_{T,\eta}(\psi^x)) \\
&\geq 1 - \rho
\end{aligned}$$

□

Lemme 10. Soit $(\varepsilon_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de réels strictement positifs de limite nulle, $(\varphi_{\varepsilon_n})_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de $\mathcal{E}(D)$ qui converge dans $\mathcal{E}(D)$ vers une application φ . Alors $F^{\varepsilon_n}(\varphi_{\varepsilon_n})$ converge vers $F(\varphi)$ dans $\mathcal{E}(\mathbb{R})$ quand n tend vers l'infini.

Démonstration.

On distingue deux cas, selon que le temps d'explosion de φ est nul ou non.

Si $\tau(\varphi) > 0$, d'après le lemme 9, pour tout $t_0 < \tau(\varphi) = \tau(F(\varphi))$, tout $\eta > 0$, il existe $\gamma > 0$ et $\varepsilon_0 > 0$ tels que si $\varepsilon \leq \varepsilon_0$, on ait $F^\varepsilon(V_{t_0,\gamma}(\varphi)) \subset V_{t_0,\eta}(F(\varphi))$.

φ_{ε_n} converge vers φ dans $\mathcal{E}(D)$ donc uniformément sur $[0, t_0]$: il existe n_0 tel que pour $n \geq n_0$,

$$\sup_{t \in [0, t_0]} |\varphi_{\varepsilon_n}(t) - \varphi(t)| < \gamma, \quad \text{et} \quad \varepsilon_n \leq \varepsilon_0$$

Pour $n \geq n_0$, on a donc $\varphi_{\varepsilon_n} \in V_{t_0,\gamma}(\varphi)$, donc $F^{\varepsilon_n}(\varphi_{\varepsilon_n}) \in V_{t_0,\eta}(F(\varphi))$.

Si $\tau(\varphi) = 0$, φ est l'application constante égale à δ et donc $\psi = F(\varphi)$ est l'application constante égale à $\hat{\delta}$. Il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq n_0$, on ait $\varphi_{\varepsilon_n} = \varphi$, soit pour tout $t \in [0, T]$, $\varphi_{\varepsilon_n}(t) = \delta$. Par conséquent, pour tout $n \geq n_0$, on a $F^{\varepsilon_n}(\varphi_{\varepsilon_n})(t) = v^{\varepsilon_n}(\delta) = \hat{\delta}$, $F^{\varepsilon_n}(\varphi_{\varepsilon_n}) = \psi$. $F^{\varepsilon_n}(\varphi_{\varepsilon_n})$ converge donc vers $F(\varphi)$ dans $\mathcal{E}(\mathbb{R})$.

□

4.4 Principe de grandes déviations pour le processus « tué »

Le principe de grandes déviations pour le processus « tué » $(\mathcal{Y}_t^{\varepsilon,x})_{t \in [0,T]}$ va se déduire du principe de grandes déviations pour la diffusion « tuée » $(\mathfrak{X}_t^{\varepsilon,x})_{t \in [0,T]}$ par un raisonnement analogue à celui du principe de contraction. Comme nos hypothèses sont un peu plus faibles que celles sous lesquelles il est classiquement énoncé (en particulier parce que nous travaillons dans des espaces topologiques), nous allons en refaire la preuve.

Définition 9. Pour tout $x \in D$ et toute $\psi \in \mathcal{E}(\mathbb{R})$, on pose

$$\lambda'(\psi) = \lambda'_x(\psi) := \inf \{ \lambda_x(\varphi), \varphi \in \mathcal{E}(D), \psi = F(\varphi) \}$$

avec la convention usuelle $\inf \emptyset = +\infty$.

On définit aussi pour tout A borélien de $\mathcal{E}(\mathbb{R})$,

$$\Lambda'(A) = \Lambda'_x(A) := \inf \{ \lambda'(\psi), \psi \in A \}$$

λ' est une fonction de taux sur $\mathcal{E}(\mathbb{R})$, car pour toute constante positive M , l'ensemble

$$\begin{aligned} \{ \lambda' \leq M \} &= \{ \psi \in \mathcal{E}(\mathbb{R}), \exists \varphi \in \mathcal{E}(D), \psi = F(\varphi), \lambda(\varphi) \leq M \} \\ &= F(\{ \lambda \leq M \}) \end{aligned}$$

est compact comme $\{ \lambda \leq M \}$ car F est continue.

Proposition 5. Minoration de grandes déviations.

Pour tout ouvert A de $\mathcal{E}(\mathbb{R})$, tout $x \in D$,

$$\liminf_{\varepsilon \rightarrow 0} \varepsilon^2 \ln \mathbb{P}(\mathcal{Y}^{\varepsilon,x} \in A) \geq -\Lambda'(A)$$

Démonstration.

- Si $\Lambda'(A) = +\infty$, c'est évident.
- Si $\Lambda'(A) < \infty$, soit $\psi \in A$ tel que $\psi = F(\varphi)$, et $\lambda(\varphi) < \infty$. Cela entraîne que φ est dans $\mathcal{E}^0(D) \cap \mathcal{E}_x(D)$, et donc $\tau(\varphi) > 0$. A est ouvert, donc il existe $t_0 \in]0, T]$, tel que $t_0 < \tau(\varphi)$ et $\eta > 0$, tels que $V_{t_0,\eta}(\psi) \subset A$.

$$\liminf_{\varepsilon \rightarrow 0} \varepsilon^2 \ln \mathbb{P}(\mathcal{Y}^{\varepsilon,x} \in A) \geq \liminf_{\varepsilon \rightarrow 0} \varepsilon^2 \ln \mathbb{P}(\mathcal{Y}^{\varepsilon,x} \in V_{t_0,\eta}(\psi))$$

D'après le lemme 9, il existe $\gamma > 0$, $\varepsilon_0 > 0$, tels que si $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0$, $F^\varepsilon(V_{t_0,\gamma}(\varphi)) \subset V_{t_0,\eta}(\psi)$, donc :

$$\begin{aligned} \liminf_{\varepsilon \rightarrow 0} \varepsilon^2 \ln \mathbb{P}(\mathcal{Y}^{\varepsilon,x} \in A) &\geq \liminf_{\varepsilon \rightarrow 0} \varepsilon^2 \ln \mathbb{P}(F^\varepsilon(\mathfrak{X}^{\varepsilon,x}) \in F^\varepsilon(V_{t_0,\gamma}(\varphi))) \\ &\geq \liminf_{\varepsilon \rightarrow 0} \varepsilon^2 \ln \mathbb{P}(\mathfrak{X}^{\varepsilon,x} \in V_{t_0,\gamma}(\varphi)) \\ &\geq -\Lambda(V_{t_0,\gamma}(\varphi)) \\ &\geq -\lambda(\varphi) \end{aligned}$$

en utilisant le Théorème 6. Ceci est vrai pour tout $\varphi \in \mathcal{E}(D)$ tel que $F(\varphi) \in A$ et $\lambda(\varphi) < \infty$, donc on en déduit le résultat. □

Proposition 6. Majoration de grandes déviations.

Pour tout fermé A de $\mathcal{E}(\mathbb{R})$, tout $x \in D$,

$$\limsup_{\varepsilon \rightarrow 0} \varepsilon^2 \ln \mathbb{P}(\mathcal{Y}^{\varepsilon, x} \in A) \leq -\Lambda'(A)$$

Démonstration.

Soit $C = \{\varphi \in \mathcal{E}(D) : F(\varphi) \in A\}$, et $C^\varepsilon = \{\varphi \in \mathcal{E}(D) : F^\varepsilon(\varphi) \in A\}$.

Soit $\mathcal{K}$ un compact de $\mathcal{E}(D)$, et $\mathcal{L}$ un compact de $\mathcal{E}(D)$ qui contient strictement $\mathcal{K}$ ($\mathcal{L}$ contient un voisinage $\mathcal{K}^\eta$ de $\mathcal{K}$).

Soit U un ouvert quelconque de $\mathcal{E}(D)$ qui contient C .

Le lemme 10 implique l'existence d'un $\varepsilon_0 > 0$ tel que si $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0$,

$$C^\varepsilon \cap \mathcal{L} \subset U$$

Prouvons ce fait par l'absurde.

Si cela est faux, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, il existe $0 < \varepsilon_n \leq \frac{1}{n}$, $\varphi_{\varepsilon_n} \in \mathcal{L}$ telle que $F^{\varepsilon_n}(\varphi_{\varepsilon_n}) \in A$ et $\varphi_{\varepsilon_n} \notin U$.

Par compacité de $\mathcal{L}$, comme l'espace topologique $\mathcal{E}(D)$ est à base dénombrable, on peut extraire de la suite $(\varphi_{\varepsilon_n})_n$ une sous-suite convergente dans $\mathcal{L}$ de limite φ , encore notée $(\varphi_{\varepsilon_n})_n$. U est ouvert, donc φ n'est pas dans U , et d'après le lemme 10, la suite $(F^{\varepsilon_n}(\varphi_{\varepsilon_n}))_n$ converge vers $F(\varphi)$ dans $\mathcal{E}(\mathbb{R})$. Cette dernière suite est à valeurs dans le fermé A donc $F(\varphi) \in A$, ce qui signifie que $\varphi \in C$, et contredit $\varphi \notin U$.

On l'applique avec le compact $\mathcal{K} := \{\varphi \in \mathcal{E}(D) : \lambda(\varphi) \leq M\}$, où M est une constante positive.

Pour tout $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0$,

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(\mathcal{Y}^{\varepsilon, x} \in A) &\leq \mathbb{P}(\mathcal{X}^{\varepsilon, x} \in C^\varepsilon) \\ &\leq \mathbb{P}(\mathcal{X}^{\varepsilon, x} \in C^\varepsilon \cap \mathcal{K}^\eta) + \mathbb{P}(\mathcal{X}^{\varepsilon, x} \notin \mathcal{K}^\eta) \\ &\leq \mathbb{P}(\mathcal{X}^{\varepsilon, x} \in U) + \mathbb{P}(\mathcal{X}^{\varepsilon, x} \notin \mathcal{K}^\eta) \end{aligned}$$

Le principe de grandes déviations pour le processus $\mathcal{X}^{\varepsilon, x}$ (Théorème 6) nous donne :

$$\begin{aligned} \limsup_{\varepsilon \rightarrow 0} \varepsilon^2 \ln \mathbb{P}(\mathcal{X}^{\varepsilon, x} \in U) &\leq -\Lambda(\overline{U}) \\ \limsup_{\varepsilon \rightarrow 0} \varepsilon^2 \ln \mathbb{P}(\mathcal{X}^{\varepsilon, x} \notin \mathcal{K}^\eta) &\leq -\Lambda(\mathbb{C}\mathcal{K}^\eta) \end{aligned}$$

Si $\varphi \notin \mathcal{K}^\eta$, $\lambda(\varphi) > M$, donc $\Lambda(\mathbb{C}\mathcal{K}^\eta) \geq M$.

$$\limsup_{\varepsilon \rightarrow 0} \varepsilon^2 \ln \mathbb{P}(\mathcal{X}^{\varepsilon, x} \notin \mathcal{K}^\eta) \leq -M$$

D'où

$$\limsup_{\varepsilon \rightarrow 0} \varepsilon^2 \ln \mathbb{P}(\mathcal{Y}^{\varepsilon, x} \in A) \leq \max(-\Lambda(\overline{U}), -M)$$

On obtient le résultat en faisant tendre M vers l'infini, puisque

$$\begin{aligned} \Lambda'(A) &= \Lambda(C) \\ &= \inf \{ \Lambda(\overline{U}) : U \text{ ouvert de } \mathcal{E}(D), C \subset U \} \end{aligned}$$

□

On a donc démontré le théorème suivant :

Théorème 8. *Sous les hypothèses 3 et 4, pour tout $x \in D$, le processus $(\mathcal{Y}_t^{\varepsilon, x})_{t \in [0, T]}$ satisfait un principe de grandes déviations dans l'espace des trajectoires explosives $\mathcal{E}(\mathbb{R})$, associé à la fonction de taux λ'_x .*

5 Complément

5.1 Présentation du problème et hypothèses

Dans cette section, on ne suppose plus l'existence d'un point d'équilibre stable x^* pour le système déterministe (2), mais au contraire que les solutions issues d'un point de D sortent toutes en temps fini de D , strictement. On s'intéresse dans ce cadre au comportement limite de la solution de l'équation rétrograde précédemment étudiée, et aux équations aux dérivées partielles associées.

Plus précisément, on suppose encore vérifiée l'hypothèse 1, mais on remplace les hypothèses 2 et 3 par :

Hypothèse 6. *La fonction φ^x sort de D « de manière régulière », selon la terminologie de Freidlin et Wentzell (cf. [7]), c'est-à-dire : pour tout $x \in \bar{D}$, le temps d'explosion*

$$\tau^x := \inf \{t \geq 0, \varphi_t^x \in \partial D\}$$

est fini et il existe $\delta_x > 0$, tel que

$$\varphi_t^x \notin \bar{D}, \quad \forall t \in]\tau^x, \tau^x + \delta_x]$$

On rappelle qu'alors, pour tout $\eta > 0$, tout $T > 0$, uniformément en $x \in \bar{D}$,

$$\begin{cases} \mathbb{P}(|\tau^{\varepsilon, x} - \tau^x| > \eta) & \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} 0 \\ \mathbb{P}\left(\sup_{t \in [0, T]} |X_t^{\varepsilon, x} - \varphi_t^x| > \eta\right) & \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} 0 \end{cases}$$

Les Théorèmes 1, 2 et 6, qui ne font appel qu'à l'hypothèse 1, restent valides dans ce cadre.

Pour construire l'EDSR et sa limite, on a seulement besoin de la partie *a*) de l'hypothèse 4. En effet, la partie *b*) est liée à la construction de la solution de l'équation différentielle limite sur $\mathbb{R}_+$, et sous l'hypothèse 6, la limite déterministe « naturelle » du processus $Y^{\varepsilon, x}$ est la solution $\psi^x = (\psi_t^x)_{t \geq 0}$ de l'équation différentielle ordinaire suivante :

$$\psi_t = g(\varphi_{\tau^x}^x) + \int_{t \wedge \tau^x}^{\tau^x} f(\varphi_s^x, \psi_s, 0) ds, \quad t \geq 0 \quad (8)$$

5.2 Convergence et application à une équation aux dérivées partielles semi-linéaire elliptique

On considère à nouveau la fonction u^ε de la définition 2, et on pose :

Définition 10. Pour tout $x \in \bar{D}$, soit $(\psi_t^x)_{t \geq 0}$ la solution de (8). On définit une application u de $\bar{D}$ dans $\mathbb{R}$ par :

$$u(x) := \psi_0^x, \quad \forall x \in \bar{D}$$

Les propriétés de flot des équations directes et l'unicité des solutions rétrogrades permettent encore d'affirmer que :

Lemme 11. Pour tout $x \in \bar{D}$, tout $\varepsilon > 0$, tout $0 \leq t \leq \tau^{\varepsilon, x}$,

$$Y_t^{\varepsilon, x} = u^\varepsilon(X_t^{\varepsilon, x})$$

Pour tout $x \in \bar{D}$, tout $t \in [0, \tau^x]$,

$$\psi_t^x = u(\varphi_t^x)$$

On remarque que si $x \in \partial D$, on retrouve comme précédemment que $u^\varepsilon(x) = g(x)$ pour tout $\varepsilon > 0$.

Mais dans ce cadre, on a aussi $u(x) = g(x)$ pour $x \in \partial D$. En effet, on a alors $\tau^x = 0$, $g(\varphi_{\tau^x}^x) = g(x)$. Donc u^ε coïncide avec u sur la frontière de D .

u^ε est encore l'unique solution de viscosité de l'équation aux dérivées partielles (6) :

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^{\varepsilon, x} u^\varepsilon(x) + f(x, u^\varepsilon(x), \varepsilon \nabla u^\varepsilon(x) \sigma(x)) &= 0, & x \in D \\ u^\varepsilon(x) &= g(x), & x \in \partial D \end{aligned}$$

Mais l'équation aux dérivées partielles du premier ordre limite devient :

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^d \beta_i(x) \frac{\partial u}{\partial x_i}(x) + f(x, u(x), 0) &= 0, & x \in D \\ u(x) &= g(x), & x \in \partial D \end{aligned} \tag{9}$$

Contrairement à l'EDP limite de la section 3, on obtient cette fois des conditions aux limites classiques de type Dirichlet.

Théorème 9. Sous les hypothèses 1, 4 a) et 6, soient u^ε et u les fonctions données, respectivement, par les définitions 2 et 10.

1. Pour tout $\varepsilon > 0$, la fonction u^ε est l'unique solution de viscosité continue de l'équation aux dérivées partielles (6).
2. La fonction u est l'unique solution de viscosité continue du problème (9).
3. La fonction u^ε converge uniformément sur $\bar{D}$, quand ε tend vers 0, vers la fonction u .
4. (i) Si v^ε est une solution de classe $\mathcal{C}^2$ du problème (6), à dérivées bornées, alors v^ε coïncide avec u^ε .
(ii) Si v est une solution de classe $\mathcal{C}^1$ du problème (9), alors v coïncide avec u .

Démonstration.

1. et 4. (i)

La preuve est identique à celle du Théorème 5, car ces démonstrations ne font appel qu'à l'hypothèse 1 et à la partie a) de l'hypothèse 4.

3. u^ε converge uniformément vers u .

La preuve s'effectue de manière similaire à celle du Théorème 5.

2. Continuité de u

L'existence et l'unicité sont évidentes.

$(\varphi_t^x)_{t \geq 0}$ est continue par rapport à la condition initiale x pour la norme uniforme sur $[0, T]$, pour tout $T > 0$.

L'hypothèse 6 assure que :

$$\begin{aligned}\tau^x &= \inf \{t \geq 0, \varphi_t^x \in \partial D\} \\ &= \inf \{t \geq 0, \varphi_t^x \notin \bar{D}\}\end{aligned}$$

Par conséquent, l'application $\bar{D} \rightarrow \mathbb{R}_+, x \mapsto \tau^x$ est continue. L'application $x \mapsto g(\varphi_{\tau^x}^x)$ est aussi continue, et il s'agit d'un problème classique d'équation différentielle dépendant continûment d'un paramètre.

u est la solution de (9).

On montre à nouveau par un résultat de stabilité des solutions de viscosité que u est une solution de viscosité de (9).

L'unicité est, exactement comme pour u^ε , une conséquence de la monotonie stricte de f (cf. [3]).

4. (ii)

On prouve facilement comme dans la preuve du Théorème 5 que si v est une solution de classe $\mathcal{C}^1$ de cette EDP, alors pour tout $x \in D$, $t \mapsto v(\varphi_t^x)$ est la solution de (8), et par suite $v = u$.

□

En outre, comme dans la section précédente, il est possible, sous des hypothèses supplémentaires de différentiabilité, de prouver l'existence et l'unicité d'une solution classique pour l'EDP (9).

Hypothèse 7. Outre les hypothèses 1, 4 a) et 6, on suppose que :

- β est de classe $\mathcal{C}^1$.
- f est de classe $\mathcal{C}^1$ en les variables x et y .

Proposition 7. Sous l'hypothèse 7, l'application u définie sur $\bar{D}$ par $u(x) = \psi_0^x$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur D , c'est la solution de l'EDP (9).

Démonstration.

Sous l'hypothèse 7, la fonction $(t, x) \mapsto \varphi_t^x$ est de classe $\mathcal{C}^2$ en t et $\mathcal{C}^1$ en x sur $[0, T_0] \times \bar{D}$.

Il s'agit de démontrer que le temps de sortie τ^x est continûment différentiable par rapport à x . Ceci une fois établi, il s'agit d'un problème classique d'équation différentielle avec une

dépendance $\mathcal{C}^1$ en les paramètres.

Soit la fonction $h : [0, T_0] \times \bar{D} \rightarrow \mathbb{R} \times \bar{D}$ définie par

$$h(t, x) := (\phi(\varphi_t^x), x)$$

où ϕ est la fonction introduite dans la première section de cet article et définissant l'ouvert D . Ainsi, comme $\tau^x \leq T_0$ pour tout $x \in \bar{D}$,

$$\begin{aligned} \tau^x &= \inf \{t \in [0, T_0], h_1(t, x) = 0\} \\ &= \inf \{t \in [0, T_0], h_1(t, x) \leq 0\} \end{aligned}$$

ϕ est de classe $\mathcal{C}^2$, donc h est de classe $\mathcal{C}^2$ en t et $\mathcal{C}^1$ en x sur $[0, T_0] \times \bar{D}$.

Calculons sa différentielle en un point (t, x) :

$$Dh(t, x) = \begin{pmatrix} \beta(\varphi_t^x) \nabla \phi(\varphi_t^x) & z_1(t, x) \nabla \phi(\varphi_t^x) & \dots & \dots & z_d(t, x) \nabla \phi(\varphi_t^x) \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

L'hypothèse 6 entraîne que pour tout $x \in \bar{D}$,

$$\begin{aligned} \frac{\partial h_1}{\partial t}(\tau^x, x) &= \beta(\varphi_{\tau^x}^x) \nabla \phi(\varphi_{\tau^x}^x) \\ &< 0 \end{aligned}$$

Par continuité, il existe pour tout $x \in \bar{D}$ un voisinage $V^x := ([\tau^x - \eta^x, \tau^x + \eta^x] \cap [0, T_0]) \times (B(x, \eta^x) \cap \bar{D})$ de (τ^x, x) dans $[0, T_0] \times \bar{D}$ tel que $\forall (t, y) \in V^x$,

$$\frac{\partial h_1}{\partial t}(t, y) < 0$$

L'ensemble

$$\bigcup_{x \in \bar{D}} V_x$$

constitue un recouvrement ouvert du compact

$$\{(\tau^x, x), x \in \bar{D}\}$$

On en extrait un sous-recouvrement fini

$$U := \bigcup_{i=1}^N V_{x_i}$$

Par construction de U , on voit que $Dh(t, y)$ est inversible pour tout $(t, y) \in U$. De plus h est injective sur U . Il s'ensuit que $h : U \rightarrow h(U) = V$ est inversible sur U et que sa réciproque

$h^{-1} : V \rightarrow U$ est de classe $\mathcal{C}^1$.

Or pour tout $x \in D$, $(\tau^x, x) \in U$, et

$$\begin{aligned} h(\tau^x, x) &= (\phi(\varphi_{\tau^x}^x), x) \\ &= (0, x) \in V \end{aligned}$$

donc

$$(\tau^x, x) = h^{-1}(0, x)$$

L'application qui à x associe τ^x est de classe $\mathcal{C}^1$ sur l'ouvert D .

□

5.3 Convergence et grandes déviations du processus « tué »

Nous pouvons déduire la convergence uniforme sur $[0, T]$ de $Y^{\varepsilon, x}$ vers ψ^x en probabilité de la convergence uniforme de u^ε vers u .

Proposition 8. *Pour tout $\eta > 0$, tout $x \in \bar{D}$, tout $T > 0$,*

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \mathbb{P} \left(\sup_{t \in [0, T]} |Y_t^{\varepsilon, x} - \psi_t^x| > \eta \right) = 0$$

et cette convergence a lieu uniformément par rapport à $x \in \bar{D}$.

Démonstration.

Si $x \in \partial D$, alors $\tau^{\varepsilon, x} = 0 = \tau^x$ et pour tout $t \geq 0$, $Y_t^{\varepsilon, x} = u^\varepsilon(x) = g(x) = u(x) = \psi_t^x$, donc

$$\mathbb{P} \left(\sup_{t \in [0, T]} |Y_t^{\varepsilon, x} - \psi_t^x| > \eta \right) = 0$$

Si $x \in D$, $t \in [0, T]$,

$$\begin{aligned} |Y_t^{\varepsilon, x} - \psi_t^x| &= |u^\varepsilon(X_t^{\varepsilon, x}) - u(\varphi_t^x)| \mathbf{1}_{\{t \leq \tau^{\varepsilon, x} \wedge \tau^x\}} + |u^\varepsilon(X_{\tau^{\varepsilon, x}}^{\varepsilon, x}) - u(\varphi_t^x)| \mathbf{1}_{\{\tau^{\varepsilon, x} < t < \tau^x\}} \\ &\quad + |u^\varepsilon(X_t^{\varepsilon, x}) - u(\varphi_{\tau^x}^x)| \mathbf{1}_{\{\tau^x < t < \tau^{\varepsilon, x}\}} + |u(X_{\tau^{\varepsilon, x}}^{\varepsilon, x}) - u(\varphi_{\tau^x}^x)| \mathbf{1}_{\{t \geq \tau^{\varepsilon, x} \vee \tau^x\}} \end{aligned}$$

D'où :

$$\begin{aligned} \mathbb{P} \left(\sup_{t \in [0, T]} |Y_t^{\varepsilon, x} - \psi_t^x| > \eta \right) &\leq \mathbb{P} \left(\sup_{t \in [0, T \wedge \tau^{\varepsilon, x} \wedge \tau^x]} |u^\varepsilon(X_t^{\varepsilon, x}) - u(\varphi_t^x)| > \eta \right) \\ &\quad + \mathbb{P} \left(\sup_{t \in [T \wedge \tau^{\varepsilon, x}, T \wedge \tau^x]} |u^\varepsilon(X_{\tau^{\varepsilon, x}}^{\varepsilon, x}) - u(\varphi_t^x)| > \eta \right) \\ &\quad + \mathbb{P} \left(\sup_{t \in [T \wedge \tau^x, T \wedge \tau^{\varepsilon, x}]} |u^\varepsilon(X_t^{\varepsilon, x}) - u(\varphi_{\tau^x}^x)| > \eta \right) \\ &\quad + \mathbb{P} (|u(X_{\tau^{\varepsilon, x}}^{\varepsilon, x}) - u(\varphi_{\tau^x}^x)| > \eta, \tau^{\varepsilon, x} \vee \tau^x \leq T) \end{aligned}$$

Premièrement,

$$\begin{aligned} \mathbb{P} \left(\sup_{t \in [0, T \wedge \tau^{\varepsilon, x} \wedge \tau^x]} |u^\varepsilon(X_t^{\varepsilon, x}) - u(\varphi_t^x)| > \eta \right) &\leq \mathbb{P} \left(\sup_{t \in [0, T \wedge \tau^{\varepsilon, x} \wedge \tau^x]} |u^\varepsilon(X_t^{\varepsilon, x}) - u(X_t^{\varepsilon, x})| > \frac{\eta}{2} \right) \\ &\quad + \mathbb{P} \left(\sup_{t \in [0, T \wedge \tau^{\varepsilon, x} \wedge \tau^x]} |u(X_t^{\varepsilon, x}) - u(\varphi_t^x)| > \frac{\eta}{2} \right) \end{aligned}$$

u^ε converge uniformément vers u sur $\bar{D}$, et u est uniformément continue sur $\bar{D}$, donc il existe $\varepsilon_0 > 0$ tel que pour tout $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$, tout $y \in \bar{D}$,

$$|u^\varepsilon(y) - u(y)| \leq \frac{\eta}{2}$$

et il existe $\nu > 0$ tel que $|y - y'| \leq \nu$ implique

$$|u(y) - u(y')| \leq \frac{\eta}{2}$$

Par suite, pour tout $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$,

$$\mathbb{P} \left(\sup_{t \in [0, T \wedge \tau^{\varepsilon, x} \wedge \tau^x]} |u^\varepsilon(X_t^{\varepsilon, x}) - u(\varphi_t^x)| > \eta \right) \leq \mathbb{P} \left(\sup_{t \in [0, T]} |X_t^{\varepsilon, x} - \varphi_t^x| > \nu \right) \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} 0$$

uniformément en $x \in \bar{D}$.

De même,

$$\begin{aligned} \mathbb{P} \left(\sup_{t \in [T \wedge \tau^{\varepsilon, x}, T \wedge \tau^x]} |u^\varepsilon(X_{\tau^{\varepsilon, x}}^{\varepsilon, x}) - u(\varphi_t^x)| > \eta \right) &\leq \mathbb{P} \left(|u^\varepsilon(X_{\tau^{\varepsilon, x}}^{\varepsilon, x}) - u(X_{\tau^{\varepsilon, x}}^{\varepsilon, x})| > \frac{\eta}{2} \right) \\ &\quad + \mathbb{P} \left(\sup_{t \in [T \wedge \tau^{\varepsilon, x}, T \wedge \tau^x]} |u(X_{\tau^{\varepsilon, x}}^{\varepsilon, x}) - u(\varphi_t^x)| > \frac{\eta}{2} \right) \\ &\leq \mathbb{P} \left(\sup_{t \in [T \wedge \tau^{\varepsilon, x}, T \wedge \tau^x]} |X_{\tau^{\varepsilon, x}}^{\varepsilon, x} - \varphi_t^x| > \nu \right) \\ &\leq \mathbb{P} \left(|X_{\tau^{\varepsilon, x}}^{\varepsilon, x} - \varphi_{\tau^{\varepsilon, x}}^x| > \frac{\nu}{2}, \tau^{\varepsilon, x} \leq T \right) \\ &\quad + \mathbb{P} \left(\sup_{t \in [T \wedge \tau^{\varepsilon, x}, T \wedge \tau^x]} |\varphi_{\tau^{\varepsilon, x}}^x - \varphi_t^x| > \frac{\nu}{2}, \tau^{\varepsilon, x} \leq T \right) \end{aligned}$$

L'application qui à (t, x) associe φ_t^x est uniformément continue sur le compact $[0, T] \times \bar{D}$, donc il existe $\mu > 0$ tel que $|t_1 - t_2| \leq \mu$ implique, pour tout $x \in \bar{D}$,

$$|\varphi_{t_1}^x - \varphi_{t_2}^x| \leq \frac{\nu}{2}$$

Par suite,

$$\begin{aligned} \mathbb{P} \left(\sup_{t \in [T \wedge \tau^{\varepsilon, x}, T \wedge \tau^x]} |u^\varepsilon(X_{\tau^{\varepsilon, x}}^{\varepsilon, x}) - u(\varphi_t^x)| > \eta \right) &\leq \mathbb{P} \left(\sup_{t \in [0, T]} |X_t^{\varepsilon, x} - \varphi_t^x| > \frac{\nu}{2} \right) \\ &\quad + \mathbb{P} (|\tau^{\varepsilon, x} - \tau^x| > \mu) \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} 0 \end{aligned}$$

uniformément en $x \in \bar{D}$.

On majore de façon similaire le troisième terme :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P} \left(\sup_{t \in [T \wedge \tau^x, T \wedge \tau^{\varepsilon, x}]} |u^\varepsilon(X_t^{\varepsilon, x}) - u(\varphi_{\tau^x}^x)| > \eta \right) &\leq \mathbb{P} \left(\sup_{t \in [T \wedge \tau^x, T \wedge \tau^{\varepsilon, x}]} |u^\varepsilon(X_t^{\varepsilon, x}) - u(X_t^{\varepsilon, x})| > \frac{\eta}{2} \right) \\
&\quad + \mathbb{P} \left(\sup_{t \in [T \wedge \tau^x, T \wedge \tau^{\varepsilon, x}]} |u(X_t^{\varepsilon, x}) - u(\varphi_{\tau^x}^x)| > \frac{\eta}{2} \right) \\
&\leq \mathbb{P} \left(\sup_{t \in [T \wedge \tau^x, T \wedge \tau^{\varepsilon, x}]} |X_t^{\varepsilon, x} - \varphi_{\tau^x}^x| > \nu \right) \\
&\leq \mathbb{P} \left(\sup_{t \in [0, T]} |X_t^{\varepsilon, x} - \varphi_t^x| > \frac{\nu}{2} \right) \\
&\quad + \mathbb{P} \left(\sup_{t \in [T \wedge \tau^x, T \wedge \tau^{\varepsilon, x}]} |\varphi_t^x - \varphi_{\tau^x}^x| > \frac{\nu}{2} \right) \\
&\leq \mathbb{P} \left(\sup_{t \in [0, T]} |X_t^{\varepsilon, x} - \varphi_t^x| > \frac{\nu}{2} \right) \\
&\quad + \mathbb{P} (|\tau^{\varepsilon, x} - \tau^x| > \mu) \\
&\xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} 0
\end{aligned}$$

uniformément en $x \in \bar{D}$.

Enfin,

$$\begin{aligned}
\mathbb{P} (|u(X_{\tau^{\varepsilon, x}}^{\varepsilon, x}) - u(\varphi_{\tau^x}^x)| > \eta, \tau^{\varepsilon, x} \vee \tau^x \leq T) &\leq \mathbb{P} (|X_{\tau^{\varepsilon, x}}^{\varepsilon, x} - \varphi_{\tau^x}^x| > \nu, \tau^{\varepsilon, x} \vee \tau^x \leq T) \\
&\leq \mathbb{P} \left(|X_{\tau^{\varepsilon, x}}^{\varepsilon, x} - \varphi_{\tau^{\varepsilon, x}}^x| > \frac{\nu}{2}, \tau^{\varepsilon, x} \leq T \right) \\
&\quad + \mathbb{P} \left(|\varphi_{\tau^{\varepsilon, x}}^x - \varphi_{\tau^x}^x| > \frac{\nu}{2}, \tau^{\varepsilon, x} \vee \tau^x \leq T \right) \\
&\leq \mathbb{P} \left(\sup_{t \in [0, T]} |X_t^{\varepsilon, x} - \varphi_t^x| > \frac{\nu}{2} \right) \\
&\quad + \mathbb{P} (|\tau^{\varepsilon, x} - \tau^x| > \mu)
\end{aligned}$$

qui converge aussi vers 0 quand ε tend vers 0 uniformément en $x \in \bar{D}$.

□

Le Théorème 9 permet aussi d'établir l'équivalent des lemmes 9 et 10 : la convergence des fonctions F^ε vers la fonction F n'utilise que la convergence uniforme de u^ε vers u et les caractéristiques des espaces de trajectoires explosives :

Lemme 12. *Pour toute fonction $\varphi \in \mathcal{E}(D)$, telle que $\tau(\varphi) > 0$, tout $\eta > 0$, tout $t_0 < \tau(\varphi)$, $0 \leq t_0 \leq T$, il existe $\gamma > 0$, $\varepsilon_0 > 0$ tels que si $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0$, alors*

$$F^\varepsilon(V_{t_0, \gamma}(\varphi)) \subset V_{t_0, \eta}(F(\varphi))$$

Lemme 13. Soit $(\varepsilon_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de réels strictement positifs de limite nulle, $(\varphi_{\varepsilon_n})_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de $\mathcal{E}(D)$ qui converge dans $\mathcal{E}(D)$ vers une application φ . Alors $F^{\varepsilon_n}(\varphi_{\varepsilon_n})$ converge vers $F(\varphi)$ dans $\mathcal{E}(\mathbb{R})$ quand n tend vers l'infini.

Les processus $X^{\varepsilon, x}$ et $Y^{\varepsilon, x}$ sont « tués » de la même façon que précédemment. Mais cette fois on a aussi besoin de « tuer » les processus déterministes limites :

Définition 11. Pour tout $x \in D$, on définit une application $\hat{\varphi}^x$ dans $\mathcal{E}(D)$ et une application $\hat{\psi}^x$ dans $\mathcal{E}(\mathbb{R})$ par

$$\hat{\varphi}_t^x := \begin{cases} \varphi_t^x, & \text{si } t < \tau^x; \\ \delta, & \text{sinon.} \end{cases}, \quad \hat{\psi}_t^x := \begin{cases} \psi_t^x, & \text{si } t < \tau^x; \\ \hat{\delta}, & \text{sinon.} \end{cases}$$

Les définitions des fonctionnelles F^ε , $\varepsilon > 0$ et F sont inchangées.

Comme dans la section précédente, $(\mathcal{Y}_t^{\varepsilon, x})_{t \in [0, T]}$ converge vers $(\hat{\psi}_t^x)_{t \in [0, T]}$ dans $\mathcal{E}(\mathbb{R})$ en vérifiant un principe de grandes déviations :

Théorème 10. Sous les hypothèses 1, 4 a) et 6, pour tout $x \in D$, $(\mathcal{Y}_t^{\varepsilon, x})_{t \in [0, T]}$ satisfait un principe de grandes déviations dans $\mathcal{E}(\mathbb{R})$ pour la fonction de taux λ'_x de la définition 9 : pour tout borélien A de $\mathcal{E}(\mathbb{R})$,

$$\limsup_{\varepsilon \rightarrow 0} \varepsilon^2 \ln \mathbb{P}(\mathcal{Y}^{\varepsilon, x} \in A) \leq -\Lambda'(\overline{A})$$

$$-\Lambda'(\overset{\circ}{A}) \leq \liminf_{\varepsilon \rightarrow 0} \varepsilon^2 \ln \mathbb{P}(\mathcal{Y}^{\varepsilon, x} \in A)$$

La preuve est parfaitement identique à celle du Théorème 8.

Références

- [1] AZENCOTT, R. – « Grandes déviations et applications », École d'été de Probabilités de Saint-Flour 1978, Lecture Notes in Mathematics, vol. 774, Springer-Verlag, 1980, p. 1–76.
- [2] BRIAND, P. et HU, Y. – « Stability of BSDEs with Random Terminal Time and Homogenization of Semilinear PDEs », *Journal of Functional Analysis* **155**, n°2 (1998), p. 455–494.
- [3] CRANDALL, M., ISHII, H. et LIONS, P.L. – « User's guide to the viscosity solutions of second order partial differential equations », *Bulletin of the American Mathematical Society (New Series)* **27**, n°1 (1992), p. 1–67.
- [4] DARLING, R.W.R. et PARDOUX, É. – « Backward SDE with random terminal time and applications to semilinear elliptic PDE », *The Annals of Probability* **25**, n°3 (1997), p. 1135–1159.
- [5] DOSS, H. et RAINERO, S. – « Sur l'Existence, l'Unicité, la Stabilité et les propriétés de Grandes Déviations des solutions d'Équations Différentielles Stochastiques Rétrogrades à horizon aléatoire. Application à des problèmes de perturbations singulières. », *Cahiers du Ceremade*, n° 2006-19, *Soumis pour publication* (2006).
- [6] FLEMING, W.H. et SONER H.M. – *Controlled Markov processes and viscosity solutions*, Springer, 1993.

- [7] FREIDLIN, M.I. et WENTZELL, A.D. – *Random Perturbations of Dynamical Systems*, Springer-Verlag, 1984.
- [8] PARDOUX, É. – « Backward Stochastic Differential Equations and Viscosity Solutions of Systems of Semilinear Parabolic and Elliptic PDEs of Second Order », *Stochastic Analysis and Related Topics : The Geilo Workshop* (Decreusefond, L., Gjerde, J., Oksendal, B. et Ustünel, A.S., eds.), Birkhäuser, 1996.

Table des matières

1	Problème de sortie d'un domaine pour une diffusion : notations et rappels	2
2	Construction de la solution de l'EDSR et de sa limite, quand ε tend vers 0	4
2.1	Construction de la solution de l'équation perturbée	5
2.2	Construction de la solution de l'équation limite, quand ε tend vers 0	6
3	Convergence de la solution d'une équation aux dérivées partielles elliptique semi-linéaire	12
4	Convergence et principe de grandes déviations pour la solution de l'équation rétrograde	25
4.1	Espaces de trajectoires explosives	25
4.2	Définition des fonctionnelles permettant d'exprimer les solutions rétrogrades en fonction des solutions directes	27
4.3	Convergence de la solution de l'équation rétrograde	29
4.4	Principe de grandes déviations pour le processus « tué »	31
5	Complément	33
5.1	Présentation du problème et hypothèses	33
5.2	Convergence et application à une équation aux dérivées partielles semi-linéaire elliptique	33
5.3	Convergence et grandes déviations du processus « tué »	37