Relations binaires et modélisation des préférences [1]

Denis Bouyssou [2]
CNRS – LAMSADE

Philippe Vincke [3]
Université Libre de Bruxelles

révisé 30 octobre 2003

[1] Cet article est le premier chapitre d'un ouvrage collectif à paraître : Concepts et Méthodes pour l'Aide à la Décision, D. Bouyssou, D. Dubois, M. Pirlot et H. Prade (éds.), ouvrage collectif dans la série IC^2 Information, Commande, Communication publiée par Hermès. Il complète et étend les résultats présentés dans Bouyssou et Vincke (2003)

[2] LAMSADE, Université Paris Dauphine, Place du Maréchal de Lattre de Tassigny, F-75775 Paris Cedex 16, France, tel : +33 1 44 05 48 98, fax : +33 1 44 05 40 91, courriel : `bouyssou@lamsade.dauphine.fr`.

[3] Université Libre de Bruxelles, Service de Mathématique de la Gestion, CP 210/01, Boulevard du Triomphe, B-1050 Bruxelles, Belgique, tel : +32 2 650 58 89, fax : +32 2 650 59 70, courriel : `pvincke@smg.ulb.ac.be`

1 Introduction

Ce volume est consacré à la présentation de concepts, de résultats, de procédures et de logiciels visant à aider une ou plusieurs personnes à prendre une décision. Dès lors que l'on se préoccupe de « décision », il est naturel de chercher à modéliser comment comparer en termes de préférence les objets de la décision. Le but de cet article introductif est de proposer un tour d'horizon des principaux outils et résultats qui ont été développés à cette fin.

La littérature se rattachant à la modélisation des préférences est très vaste. Ceci s'explique tout d'abord par le fait que la nécessité de modéliser des préférences se fait sentir dans de nombreuses disciplines, par exemple :

- en *Économie* où l'on cherche à modéliser les choix d'un « consommateur rationnel » (voir, par exemple Debreu, 1959),
- en *Psychologie* où l'étude de jugements de préférence recueillis expérimentalement tient une place importante (voir Kahneman et Tversky, 1979 ; Kahneman, Slovic et Tversky, 1981),
- en *Sciences Politiques* où la question de la définition des préférences collectives d'un groupe d'individus est au cœur des préoccupations (Sen, 1986)
- en *Recherche Opérationnelle* où la mise en œuvre d'un algorithme d'optimisation suppose de définir une fonction objectif indiquant une direction de préférence (voir Roy, 1985),
- en *Intelligence Artificielle* où la création d'« agents » dotés de capacités de jugement implique de s'interroger sur leurs visions du « meilleur » et du « moins bon » (Doyle et Wellman, 1992),
- etc.

De plus, on peut aborder la question de la modélisation des préférences sous divers angles (voir Bell, Raiffa et Tversky, 1988) selon que l'on adopte :

- une perspective *normative* où l'on s'interroge sur les modèles de préférences susceptibles de conduire à un « comportement rationnel »,
- une perspective *descriptive* où l'on cherche à décrire le plus finement possible des préférences observées,
- une perspective *prescriptive* où l'on cherche à bâtir un modèle de préférence permettant de parvenir à une recommendation adéquate.

Enfin, les préférences qu'il s'agit de modéliser s'appliquent à des objets dont la nature dépend du problème de décision considéré. On pourra, par exemple, être amené à comparer :

– des vecteurs de $\mathbb{R}^p$ indiquant la quantité consommée de p biens,

– des candidats à une élection,

– des distributions de probabilité modélisant les résultats financiers possibles de divers projets d'investissement,

– des actions évaluées sur plusieurs critères exprimés dans des unités différentes dans le cas du choix d'une localisation d'un site industriel,

– des projets évalués sur un critère monétaire conditionnellement à l'occurrence de certains événements ou de certaines actions entreprises par d'autres,

– etc.

L'objet de cet article introductif ne saurait être de résumer l'ensemble de cette très vaste littérature. Plus modestement, nous tâcherons ici de présenter de manière simple les principaux concepts utilisés en modélisation des préférences, ce qui permettra au lecteur d'aborder les chapitres suivants muni des définitions et résultats les plus classiques. Le lecteur désirant approfondir les questions abordées dans cet article pourra se reporter à Aleskerov et Monjardet (2002), Fishburn (1970, 1985) Krantz, Luce, Suppes et Tversky (1971), Pirlot et Vincke (1997), Roberts (1979) ou Roubens et Vincke (1985).

Cet article est organisé comme suit. La section 2 est consacrée à la notion de *relation binaire* qui est l'outil central dans la plupart des modèles de préférence. On définit en section 3 ce que l'on entend habituellement par structure de préférence. La section 4 est consacrée à la présentation de deux structures de préférence classique : l'ordre et le préordre total. Les sections 5, 6 présentent diverses structures généralisant ces structures classiques. Enfin, la section 7 mentionnera divers aspects qui n'ont pu être abordés dans le cadre de ce travail.

2 Relations binaires

2.1 Définitions

Une relation binaire T dans un ensemble A est un sous-ensemble du produit cartésien $A \times A$, c'est-à-dire un ensemble de couples (a, b) d'éléments de

A. Si le couple (a, b) appartient à l'ensemble T, nous noterons fréquemment $a\ T\ b$ au lieu de $(a, b) \in T$. Dans le cas contraire, nous écrirons $(a, b) \notin T$ ou $a \neg T\ b$. Dans tout ce qui suit, on supposera, sauf mention contraire, que A est *fini*.

Remarque 1
Puisque les relations binaires sont des ensembles, on peut leur appliquer les opérations habituelles de la théorie des ensembles. Ainsi, étant donné deux relations T_1 et T_2 dans A, on notera:

$$\begin{aligned} T_1 \subset T_2 &\text{ ssi } a\ T_1\ b \Rightarrow a\ T_2\ b, \forall a, b \in A, \\ a(T_1 \cup T_2)b &\text{ ssi } a\ T_1\ b \text{ et/ou } a\ T_2\ b, \\ a(T_1 \cap T_2)b &\text{ ssi } a\ T_1\ b \text{ et } a\ T_2\ b. \end{aligned}$$

Enfin, le *produit* $T_1 \cdot T_2$ sera défini par :

$$a\ T_1 \cdot T_2\ b \text{ ssi } \exists c \in A : a\ T_1\ c \text{ et } c\ T_2\ b.$$

On notera T^2 la relation $T \cdot T$, c'est-à-dire le produit de la relation T avec elle même. •

Étant donné une relation binaire T dans A on définit :

– sa relation inverse T^- telle que :

$$a\ T^-\ b \text{ ssi } b\ T\ a,$$

– sa relation complémentaire T^c telle que :

$$a\ T^c\ b \text{ ssi } a \neg T\ b,$$

– sa relation duale T^d telle que :

$$a\ T^d\ b \text{ ssi } b \neg T\ a,$$

– sa partie symétrique I_T telle que :

$$a\ I_T\ b \text{ ssi } [a\ T\ b \text{ et } b\ T\ a],$$

– sa partie asymétrique P_T telle que :

$$a\ P_T\ b \text{ ssi } [a\ T\ b \text{ et } b \neg T\ a],$$

– sa relation d'équivalence associé E_T telle que :

$$a \; E_T \; b \text{ ssi } \left\{ \begin{array}{l} a \; T \; c \Leftrightarrow b \; T \; c, \\ c \; T \; a \Leftrightarrow c \; T \; b, \end{array} \right\}, \forall c \in A.$$

Remarque 2
On établira aisément les identités suivantes :

$$\begin{aligned} T^d &= [T^{-c}] = [T^{c-}], \\ I_T &= T \cap T^-, \\ P_T &= T \cap T^d \; . \end{aligned}$$

•

2.2 Propriétés d'une relation binaire

Une relation binaire T dans A est dite :

- *réflexive* si $a \; T \; a$,
- *irréflexive* si $a \; \neg T \; a$,
- *symétrique* si $a \; T \; b \Rightarrow b \; T \; a$,
- *antisymétrique* si $a \; T \; b$ et $b \; T \; a \Rightarrow a = b$,
- *asymétrique* si $a \; T \; b \Rightarrow b \; \neg T \; a$,
- *connexe* si $a \neq b \Rightarrow a \; T \; b$ et/ou $b \; T \; a$,
- *complète* si $a \; T \; b$ et/ou $b \; T \; a$,
- *transitive* si $a \; T \; b$ et $b \; T \; c \Rightarrow a \; T \; c$,
- *négativement transitive* si $a \; \neg T \; b$ et $b \; \neg T \; c \Rightarrow a \; \neg T \; c$,
- de *Ferrers* si $[a \; T \; b$ et $c \; T \; d] \Rightarrow [a \; T \; d$ ou $c \; T \; d]$,
- *semi-transitive* si $[a \; T \; b$ et $b \; T \; c] \Rightarrow [a \; T \; d$ ou $d \; T \; c]$,

pour tout $a, b, c, d \in A$.

Remarque 3
Nous retenons ici la terminologie qui semble être la plus employée en langue française. On pourra se reporter à Monjardet (1978) pour une discussion approfondie de ces choix. •

Remarque 4
Les propriétés des relations binaires que nous venons d'introduire ne sont pas indépendantes. On pourra, par exemple, vérifier simplement que :

- une relation est asymétrique ssi elle est irréflexive et antisymétrique,
- une relation est complète ssi elle est connexe et réflexive,
- une relation asymétrique et négativement transitive est transitive,
- une relation complète et transitive est négativement transitive.

Quelles que soient les propriétés de T, il est clair que :

- P_T est toujours asymétrique,
- I_T est toujours symétrique,
- E_T est toujours réflexive, symétrique et transitive. •

Remarque 5
Il est possible de reformuler ces propriétés de bien des manières. Notons, par exemple, que:

- T est complète $\Leftrightarrow T \cup T^{-}= A \times A$,
- T est asymétrique $\Leftrightarrow T \cap T^{-}= \varnothing$,
- T est transitive $\Leftrightarrow T^2 \subset T$,
- T est de Ferrers $\Leftrightarrow T \cdot T^d \cdot T \subset T$,
- T est semi-transitive $\Leftrightarrow T \cdot T \cdot T^d \subset T$. •

Une *relation d'équivalence* est une relation binaire réflexive, symétrique et transitive (la relation la relation E_T définie plus haut est donc, quelle que soient les propriétés de T, une relation d'équivalence). Soit E une relation d'équivalence sur A. Étant donné un élément $a \in A$, on appelle classe d'équivalence associée à a, notée $[a]_E$, l'ensemble $\{b \in A : a \; E \; b\}$. On a toujours $a \in [a]_E$. Il est élémentaire de montrer que $\forall a, b \in A$, soit $[a]_E = [b]_E$ soit $[a]_E \cap [b]_E = \varnothing$. Une relation d'équivalence induit donc une partition unique de A en *classes d'équivalence*. L'ensemble de ces classes d'équivalence est appelé le quotient de A par E, noté A/E.

2.3 Représentation graphique d'une relation binaire

Une relation binaire T dans A peut être représentée par un graphe orienté (A, T) où A est l'ensemble des sommets du graphe et T est l'ensemble des arcs du graphe (couples de sommets). Les propriétés remarquables d'une relation binaire peuvent facilement s'exprimer à l'aide de la représentation sagittale du graphe (A, T). La réflexivité de T se traduit par la présence d'une boucle en chaque sommet. La symétrie de T signifie que la présence d'un arc orienté de a vers b implique l'existence d'un arc orienté de b vers a. La transitivité de T se traduit en terme de graphe par le fait que s'il existe un chemin de longueur 2 de a vers b, il existe un arc de a vers b. Prendre la relation inverse de T revient à inverser l'orientation de tous les arcs du graphe. Prendre la relation complémentaire consiste à ajouter tous les arcs manquants dans le graphe et à supprimer tous les arcs existants. Notons qu'une relation symétrique peut, plus commodément être représentée par un graphe non orienté dans lequel les couples (a, b) et (b, a) de la relation donnent lieu à une arête entre les sommets a et b.

2.4 Représentation matricielle d'une relation binaire

Une autre manière de représenter une relation binaire T dans A est d'associer, à chaque élément de A une ligne et une colonne d'une matrice carrée M^T de dimension $|A|$. L'élément M^T_{ab} de cette matrice à l'intersection de la ligne associée à a et la colonne associée à b vaut 1 si $a\ T\ b$ et 0 sinon.

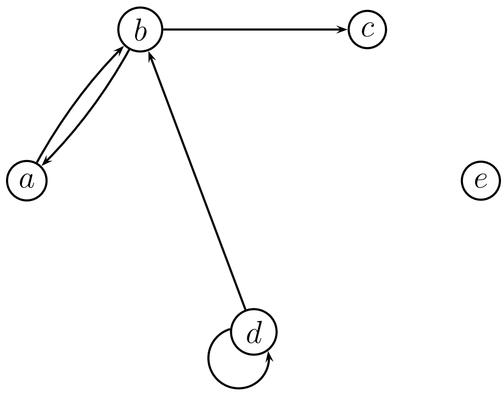
Avec une telle représentation, la réflexivité de T se traduit par la présence d'un 1 sur la diagonale de la matrice, à condition que les éléments de A aient été associés dans le même ordre aux lignes et aux colonnes de la matrice. Sous cette même condition, la symétrie de T est équivalente au fait que M^T est égale à sa transposée. Prendre la relation inverse consiste à transposer la matrice M^T. La matrice associée au produit de deux relations binaires est le produit matriciel booléen des deux matrices associées.

2.5 Exemple

Soit $A = \{a, b, c, d, e\}$. Considérons la relation binaire $T = \{(a, b), (b, a), (b, c), (d, b), (d, d)\}$. Une représentation matricielle de T est donnée par:

$\circlearrowleft$	a	b	c	d	e
a	0	1	0	0	0
b	1	0	1	0	0
c	0	0	0	0	0
d	0	1	0	1	0
e	0	0	0	0	0

Une représentation sagittale du graphe (A, T) est :



3 Relations binaires et structures de préférences

Considérons un couple (a, b) d'objets. On suppose classiquement qu'il ne peut y avoir que deux réponses possibles à la question « l'objet a est-il au moins aussi bon que l'objet b ? » : « OUI » ou « NON », ces deux réponses étant exclusives. Poser cette question pour tout couple d'objets amène alors à définir une *relation binaire* S sur l'ensemble A des objets en posant : aSb si et seulement si la réponse à la question « l'objet a est-il au moins aussi bon que l'objet b ? » est OUI. Compte tenu de sa définition, il est naturel de supposer que S est réflexive, ce que nous ferons de manière systématique dans la suite de ce texte.

Définition 1
On appelle structure de préférence *sur A la donnée d'une relation binaire réflexive S dans A.*

Remarque 6
La définition précédente soulève une question d'*observabilité*. Si l'on souhaite fonder l'idée de préférence sur un comportement observable, on pourra

prendre comme primitive les choix observés sur divers sous-ensembles d'objets. Ce changement de primitive est à la base de la théorie dite des « préférences révélées » dans laquelle la relation S est inférée à partir de choix, en théorie, observables. Une telle inférence suppose cependant que les choix sont essentiellement « binaires » au sens où les choix faits sur des *paires* d'objets permettent de prédire les choix faits dans des ensembles plus vastes. Les conditions de « rationalisation » d'une fonction de choix qui formalisent cette observation sont classiques (voir par exemple Sen (1970, 1977)). Elles ont été récemment soumises à de virulentes critiques (voir Malishevski, 1993 ; Sen, 1993 ; Sugden, 1985). •

Remarque 7
On peut vouloir autoriser des réponses autres que OUI ou NON » à la question « l'objet a est-il au moins aussi bon que l'objet b ? » , par exemple :

– des réponses du type « je ne sais pas » ;

– des réponses incluant une information sur l'*intensité* de la préférence, par exemple, « a est fortement — faiblement, modérément — préféré à b » ;

– des réponses incluant une information sur la *crédibilité* de la proposition "a est au moins aussi bon que b", par exemple « la crédibilité de la proposition "a est au moins aussi bon que b" est supérieure à la crédibilité de la proposition "c est au moins aussi bon que d" » ou même « la crédibilité de la proposition "a est au moins aussi bon que b" est $\alpha \in [0; 1]$ ».

Admettre de telles réponses implique d'utiliser un langage plus riche que celui d'une relation binaire pour modéliser des préférences, par exemple :

– le langage des *relations floues* (ou valuées) (voir Doignon, Monjardet, Roubens et Vincke, 1986 ; Fodor et Roubens, 1994 ; Perny et Roy, 1992), chaque assertion du type $a\ S\ b$ étant alors munie d'un *degré de crédibilité*,

– des langages autorisant la modélisation de situations d'hésitation (voir, par exemple, Roy et Vincke, 1987)

– des langages utilisant l'idée d'*intensité* de préférence (voir Bana e Costa et Vansnick, 1994 ; Doignon, 1987), une assertion du type $a\ S\ b$ et $b\ \neg S\ a$ étant alors munie d'un qualificatif (préférence faible, forte ou extrême, par exemple) ou encore

– des langages utilisant des *logiques non classiques* (voir Tsoukiàs et Vincke, 1992, 1995, 1997)) permettant de modéliser l'absence d'information ou, au contraire, la présence d'informations contradictoires, la valeur de vérité d'une assertion du type $a\ S\ b$ pouvant être alors non seulement « vrai » ou « faux » mais aussi « inconnu » ou « contradictoire ».

Nous n'envisagerons pas de telles extensions dans le cadre de cet article. •

Considérons une structure de préférence S sur un ensemble A. Pour toute paire d'objets $\{a, b\}$, on sera alors confronté à une et une seule des quatre situations suivantes (voir figure 1) :

1. $[a\ S\ b$ et $b\ S\ a]$, notée $a\ I_S\ b$, que l'on interprète comme « a est *indifférent* à b »,

2. $[a\ \neg S\ b$ et $b\ \neg S\ a]$, notée $a\ J_S\ b$, que l'on interprète comme « a est *incomparable* à b »,

3. $[a\ S\ b$ et $b\ \neg S\ a]$, notée $a\ P_S\ b$, que l'on interprète comme « a est *strictement préféré* à b » et

4. $[a\ \neg S\ b$ et $b\ S\ a]$, notée $b\ P_S\ a$, que l'on interprète comme « b est *strictement préféré* à a ».

Lorsqu'il n'y aura pas d'ambiguïté possible, on notera I, J et P au lieu de I_S, J_S et P_S

	$b\ S\ a$	$b\ \neg S\ a$
$a\ S\ b$	$a\ I\ b$	$a\ P\ b$
$a\ \neg S\ b$	$b\ P\ a$	$a\ J\ b$

FIG. 1 – Quatre situations exhaustives et mutuellement exclusives

Par construction, I et J sont symétriques et P est asymétrique. Puisque S est réflexive, I est réflexive et J est irréflexive. Les trois relations P, I et I sont :

– mutuellement exclusives, c'est-à-dire que $P \cap I = P \cap J = I \cap J = \varnothing$ et

– exhaustives, c'est-à-dire $P \cup P^{-} \cup I \cup J = A^2$.

Remarque 8
Dans de nombreux travaux, on note $\succsim$ au lieu de S, $\succ$ au lieu de P et $\sim$ au lieu de I. $\bullet$

Remarque 9
Étant donné une structure de préférence S sur A, il peut être intéressant de travailler sur la relation induite par S sur l'ensemble quotient A/E_S, où E_S désigne la relation d'équivalence associée à S. Ceci permet de simplifier de nombreux résultats. $\bullet$

Remarque 10
Une structure de préférence étant une relation binaire réflexive, on pourra la représenter en utilisant les représentations graphiques et matricielles présentées plus haut. Afin d'alléger les représentations graphiques, nous omettrons systématiquement les boucles de réflexivité et on utilisera les conventions de la figure 2

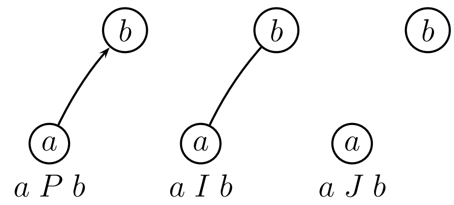


Fig. 2 – Conventions graphiques

Exemple 1
Soit $A = \{a, b, c, d, e\}$. Considérons la structure de préférence suivante donnée par $S = \{\ (a, a),\ (a, b),\ (a, c),\ (a, e),\ (b, a),\ (b, b),\ (b, c),\ (c, b),\ (c, c),\ (d, a),\ (d, b),\ (d, c),\ (d, d),\ (e, a),\ (e, c),\ (e, e),\ \}$. On a :

- $P = \{(a, c), (d, a), (d, b), (d, c), (e, c)\}$,
- $I = \{(a, a), (a, b),\ (a, e),\ (b, a),\ (b, b),\ (b, c),\ (c, b),\ (c, c),\ (d, d),\ (e, a),\ (e, e)\}$,
- $J = \{(b, e), (d, e), (e, b), (e, d)\}$.

On a alors avec nos conventions la représentation matricielle et la représentation graphique données aux figures 3 et 4. $\diamond$

$\circlearrowleft$	a	b	c	d	e
a	1	1	1	0	1
b	1	1	1	0	0
c	0	1	1	0	0
d	1	1	1	1	0
e	1	0	1	0	1

FIG. 3 – Représentation matricielle

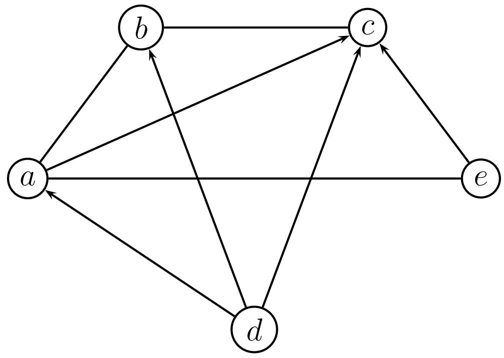


FIG. 4 – Représentation graphique

4 Structures de préférence classiques

4.1 La structure d'ordre total (ou complet)

4.1.1 Définition

Une structure de préférence S est une structure d'ordre total ssi :

- S est complète,
- S est transitive,
- S est antisymétrique.

Dans une structure d'ordre total, la relation d'incomparabilité est vide ($J = \varnothing$) et la relation d'indifférence I est limitée aux couples identiques ($I = \{(a, a) : a \in A\}$). La relation de préférence stricte P est connexe et transitive. La structure d'ordre total consiste donc en un rangement des éléments de A du meilleur au moins bon (via la relation P) sans qu'il y ait d'ex aequo possibles.

Remarque 11
Il est facile de vérifier qu'une définition équivalente de la structure d'ordre total consiste à poser que S est complète et ne contient aucun circuit autre que les boucles.

Il est clair que si S est une structure d'ordre total :

- P est connexe et transitive,
- I est transitive,
- $I \cdot P \subset P$,
- $P \cdot I \subset P$. •

Remarque 12
La vérification qu'une structure de préférence est un ordre total est particulièrement simple en utilisant la représentation matricielle de S. En effet en choisissant d'étiqueter les lignes et les colonnes de la représentation matricielle selon la relation P, on obtient clairement un tableau dont toute la diagonale et la partie sur-diagonale est remplie de 1 et dont la partie sous-diagonale ne comporte que des 0. La relation P correspond alors aux 1 situés en dehors de la diagonale. En ordonnant les sommets de la représentation graphique d'une structure d'ordre total selon la relation P, tous les arcs vont de la gauche vers la droite.

Exemple 2
Soit $A = \{a, b, c, d, e\}$. Considérons la structure de préférence : $S = \{(a, a)$, (a, b), (a, c), (a, d), (a, e), (b, b), (b, c), (b, d), (b, e), (c, c), (c, d), (c, e), (d, d), (d, e), $(e, e)\}$.

On vérifiera aisément qu'il s'agit bien d'un ordre total en considérant la représentation matricielle de la figure 5 ou sa représentation graphique donnée à la figure 6 ◇

⟳	a	b	c	d	e
a	1	1	1	1	1
b	0	1	1	1	1
c	0	0	1	1	1
d	0	0	0	1	1
e	0	0	0	0	1

FIG. 5 – Représentation matricielle d'un ordre total

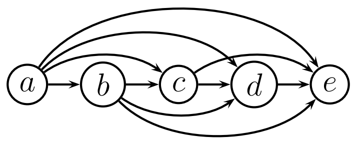


FIG. 6 – Représentation graphique d'un ordre total

4.1.2 Représentation numérique

Soit S une structure d'ordre total sur A. On peut associer de manière évidente un rang à chaque objet de A de telle sorte que ce rang reflète sa position dans la relation S. Nous laissons le soin au lecteur de donner une démonstration du théorème suivant.

Théorème 1
Une structure de préférence S sur un ensemble fini A est une structure d'ordre total si et seulement si (ssi) il existe une fonction $g : A \to \mathbb{R}$ telle que, $\forall a, b \in A$:

$$\begin{cases} a \; S \; b \Leftrightarrow g(a) \geq g(b), \\ g(a) = g(b) \Rightarrow a = b. \end{cases}$$

Remarque 13
La représentation numérique d'une structure d'ordre total n'est clairement pas unique. Il est facile de montrer qu'étant donné une représentation numérique g vérifiant les conditions du théorème 1, toute transformation strictement croissante appliquée à g conduit à une autre représentation admissible. Réciproquement si g et h sont deux représentations satisfaisant les conditions du théorème 1, il existe une fonction strictement croissante ϕ telle que $g = \phi \circ h$. On dit alors que g est une *échelle ordinale*.

Étant donnée une fonction g vérifiant les conditions du théorème, il est possible de comparer des « écarts » tels que $g(a) - g(b)$ et $g(c) - g(d)$. La comparaison de ces valeurs est néanmoins clairement dépendante du choix d'une fonction g particulière : un autre choix légitime pourrait conduire à une comparaison d'écarts différente. Il n'est donc pas possible, en général, de donner une signification particulière à ces comparaisons. •

Remarque 14
Le théorème 1 reste vrai si l'on suppose que A est infini dénombrable (on définit alors g par une récurrence simple à établir). Il est clair en revanche que ce résultat n'est plus vrai dans le cas général. Donnons-en deux exemples.

1. On sait que le cardinal de $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ (c'est-à-dire l'ensemble des parties de $\mathbb{R}$) est strictement plus grand que celui de $\mathbb{R}$. Une structure d'ordre total quelconque sur $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ ne pourra donc pas avoir de représentation numérique au sens du théorème 1. On peut alors se demander si le

théorème 1 reste vrai en se limitant aux ensemble A ayant au plus le cardinal de $\mathbb{R}$. Il n'en est rien comme le montre l'exemple suivant.

2. Posons $A = \mathbb{R} \times \{0; 1\}$. Il est facile de montrer qu'il existe une bijection entre A et $\mathbb{R}$ qui ont donc même cardinal. Considérons la structure de préférence lexicographique définie en posant:

$$(x, y)\ P\ (z, w) \Leftrightarrow \begin{cases} x > z \text{ ou} \\ x = z \text{ et } y > w, \end{cases}$$

et

$$(x, y)\ I\ (z, w) \Leftrightarrow x = z \text{ et } y = w.$$

Il est facile de montrer que la structure $S = P \cup I$ est une structure d'ordre total. Elle n'admet cependant pas de représentation numérique au sens du théorème 1. Si une telle représentation g existait, on aurait nécessairement, $\forall x \in \mathbb{R}$, $(x, 1)\ P\ (x, 0)$ et donc $g(x, 1) > g(x, 0)$. Il existe nécessairement un nombre rationnel $\mu(x)$ tel que $g(x, 1) > \mu(x) > g(x, 0)$. On sait que $(y, 1)\ P\ (y, 0)\ P\ (x, 1)\ P\ (x, 0)$ si et seulement si $y > x$. On a donc $y > x \Leftrightarrow \mu(y) > \mu(x)$. La fonction μ ainsi construite est une bijection entre $\mathbb{R}$ et $\mathbb{Q}$, ce qui est contradictoire.

On trouvera dans Beardon, Candeal, Herden, Induráin et Mehta (2002) une analyse détaillée des diverses situations dans lesquelles une structure d'ordre total n'admet pas de représentation numérique. Mentionnons simplement ici que l'on connaît les conditions nécessaires et suffisantes permettant d'obtenir une représentation numérique dans le cas général (Briges et Mehta, 1995 ; Debreu, 1954 ; Fishburn, 1970 ; Krantz et al., 1971). Elles reviennent à supposer que S dans A a un comportement « proche » de celui de $\geq$ dans $\mathbb{R}$. •

4.2 La structure de préordre total (ou complet)

4.2.1 Définition

Une structure de préférence S est une structure de préordre total ssi:

- S est complète,
- S est transitive.

La structure de préordre total généralise celle d'ordre total en n'imposant plus à S d'être antisymétrique, autorisant ainsi l'occurrence d'éventuels éléments ex aequo (au sens de la relation I).

Remarque 15
Une définition équivalente de la structure de préordre total consiste à poser que S est complète et qu'aucun circuit de S ne contient d'arc P.

Il est clair que si S est une structure de préordre total :

- P est transitive,
- P est négativement transitive,
- I est transitive (I est donc une relation d'équivalence),
- $I \cdot P \subset P$,
- $P \cdot I \subset P$,
- la relation S induit un ordre total sur l'ensemble A/I. •

Remarque 16
Soit T une relation asymétrique et négativement transitive dans A. Posons $S = T \cup (T^{-} \cap T^{d})$. Il est aisé de montré qu'alors S est un préordre total. Une relation T asymétrique et négativement transitive est appelée en anglais un *weak order*. •

Remarque 17
Si l'on choisit d'ordonner les lignes et les colonnes de la représentation matricielle d'une structure de préordre total de manière compatible avec la relation P, l'ordre des lignes et des colonnes étant arbitraire pour des éléments indifférents, on obtient une matrice où les 1 sont séparés des 0 par une « frontière en escalier » sous diagonale et venant s'appuyer sur la diagonale. La représentation graphique d'une structure de préordre total généralise de manière similaire celle d'un ordre total.

Exemple 3
Soit $A = \{a, b, c, d, e\}$. Considérons la structure de préférence $S = (a, a), (a, b), (a, c), (a, d), (a, e), (b, a), (b, b), (b, c), (b, d), (b, e), (c, c), (c, d), (c, e), (d, c), (d, d), (d, e), (e, e)\}$. On vérifiera aisément qu'il s'agit bien d'un préordre total en considérant la représentation matricielle de la figure 7 ou sa représentation graphique donnée à la figure 8. ◇

$\circlearrowleft$	a	b	c	d	e
a	1	1	1	1	1
b	1	1	1	1	1
c	0	0	1	1	1
d	0	0	1	1	1
e	0	0	0	0	1

FIG. 7 – Représentation matricielle d'un préordre total

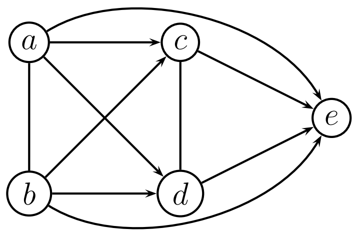


FIG. 8 – Représentation graphique d'un préordre total

4.2.2 Représentation numérique

En utilisant le fait qu'une structure de préordre total induit une structure d'ordre total sur A/I, on démontrera facilement le résultat suivant.

Théorème 2
Une structure de préférence S sur un ensemble fini Set est une structure de préordre total ssi il existe une fonction $g : A \to \mathbb{R}$ telle que, $\forall a, b \in A$:

$$a \; S \; b \Leftrightarrow g(a) \geq g(b).$$

Remarque 18
Comme dans le cas de l'ordre total, la représentation numérique d'un préordre total est définie à une transformation strictement croissante près. La fonction g définit ici aussi une échelle ordinale et la plupart des assertions obtenues en opérant des manipulations algébriques sur les valeurs de g ont une valeur de vérité qui dépend de la fonction g : elles ne sont pas signifiantes au sens de Roberts (1979). •

Remarque 19
Il est clair que le résultat ci-dessus reste vrai lorsque A est infini dénombrable (puisque dans ce cas une structure d'ordre total admet une représentation numérique). De même que dans le cas de l'ordre total, la généralisation de ce résultat au cas général suppose l'introduction de conditions additionnelles. •

4.3 Problèmes classiques

Le préordre total est la structure de préférence implicitement utilisée dans tous les problèmes d'optimisation, c'est-à-dire dans la plupart des travaux classiques de recherche opérationnelle, d'économie, de théorie de la décision, d'actuariat, etc. : la fonction g est celle qu'il faut maximiser et s'appelle, selon le contexte, fonction économique, fonction de valeur, fonction d'utilité, critère, fonction objectif, ... Il est remarquable de constater que l'on ait traité aussi longtemps les problèmes de décision de cette manière sans se demander si la fonction g utilisée représentait les préférences des décideurs de façon adéquate.

Nous mentionnons ci-après quelques questions classiques qui ont été étudiées avec cette structure.

4.3.1 Choisir à partir d'une relation binaire

Supposons connu un préordre total S sur un ensemble A et envisageons la situation (classique en économie) où un choix doit être fait dans un sous-ensemble d'objets $B \subseteq A$. Comment utiliser l'information contenue dans S pour guider un tel choix ? Une manière naturelle de définir l'ensemble $C(B, S)$ des objets choisis (remarquons que, puisque nous n'imposons pas à $C(B, S)$ d'être un singleton, il serait plus approprié de parler d'objets « susceptibles d'être choisis ») dans B sur la base de S consiste à poser :

$$C(B, S) = \{b \in B : Non[\, a \; P \; b\,] \text{ pour tout } a \in B\},$$

un objet appartenant à l'ensemble de choix si aucun autre objet ne lui est strictement préféré. Il n'est pas difficile de montrer que $C(B, S)$ est toujours non vide lorsque B est fini (le cas où B est infini soulève des difficultés techniques spécifiques, voir Bergstrom (1975)) et S est un préordre total. Remarquons cependant que, dans le cas où B est fini, le fait que S soit un préordre complet est une condition suffisante mais non nécessaire pour que $C(B, S)$ soit non vide.

Un résultat classique (voir Sen, 1970)) montre que, B étant supposé fini, $C(B, S)$ est non vide dès lors que P n'a pas de circuit dans B (on n'a jamais, pour tout $a_1, a_2, \ldots, a_k$ appartenant à B, $a_1 \; P \; a_2, a_2 \; P \; a_3, \ldots, a_{k-1} \; P \; a_k$ et $a_k \; P \; a_1$). L'utilisation de structures de préférences plus générales que le préordre complet permet donc également de donner une réponse simple au problème faisant l'objet de ce paragraphe.

Mentionnons enfin qu'il existe des situations (le concours d'entrée à une grande école par exemple) où l'on souhaite être en mesure d'ordonner tout sous-ensemble d'objets $B \subseteq A$ et non pas seulement déterminer l'ensemble

$C(B, S)$ des objets choisis. La structure de préordre total permet de donner une réponse triviale à ce problème puisque la restriction d'un préordre total sur A à un sous-ensemble $B \subseteq A$ est un préordre total sur B.

4.3.2 Agréger des préférences

Supposons que l'on ait collecté $n \geq 2$ relations de préférence sur A, par exemple parce que les objets sont évalués selon divers points de vue (votants, critères ou experts). Dans une telle situation, il est naturel de chercher à bâtir une relation de préférence « collective » S agrégeant l'information contenue dans $(S_1, S_2, \ldots, S_n)$. En général, on recherchera un « mécanisme » (« système électoral » ou « méthode d'agrégation ») permettant d'agréger *tout* n-uple de relations de préférence sur A en une relation de préférence collective Dans le cas de préordre totaux, se donner un tel mécanisme revient à définir une fonction d'agrégation F de $\mathcal{PT}(A)^n$ dans $\mathcal{PT}(A)$, où $\mathcal{PT}(A)$ est l'ensemble des préordres totaux dans A. L'ouvrage classique de K.J. Arrow (1963), a mis clairement en lumière la difficulté d'un tel problème. Imposer un petit nombre de conditions sur F, en apparence toutes très raisonnables (respect de l'unanimité, indépendance vis-à-vis des alternatives non pertinentes, absence de dictateur), conduit rapidement à un résultat d'impossibilité : aucune méthode d'agrégation n'est susceptible de les vérifier simultanément (pour une synthèse très riche de ce type de résultats, voir Campbell et Kelly (2002) et Sen (1986)). La méthode majoritaire fournit un exemple simple des difficultés mises à jour par le résultat d'Arrow. Cette méthode consiste à déclarer que « a est collectivement au moins aussi bon que b » s'il y a au moins autant de préordres dans lesquels « a est au moins aussi bon que b » que de préordres dans lesquels « b est au moins aussi bon que a ». Une telle méthode semble très raisonnable et parfaitement en accord avec une idée intuitive de « décision démocratique ». Elle ne conduit cependant pas toujours à une relation de préférence collective ayant les propriétés d'un préordre complet ni même à une relation de préférence stricte sans circuit. C'est le célèbre « effet Condorcet » ; $A = \{a, b, c\}$, $n = 3$, $a\ P_1\ b\ P_1\ c, c\ P_2\ a\ P_2\ b$ et $b\ P_3\ c\ P_3\ a$ fournit l'exemple classique d'une telle situation. Utiliser une relation de préférence collective dont la partie asymétrique peut comporter des circuits pour choisir et/ou ranger est loin d'être une tâche aisée. De très nombreuses recherches y ont été consacrées (voir Laslier, 1997 ; Moulin, 1986 ; Schwartz, 1986).

4.3.3 Structures particulières de l'ensemble d'objets

Dans de nombreuses situations, il est naturel de supposer que la structure de l'ensemble des objets A n'est pas quelconque. Ce sera par exemple le cas avec :

- la décision *multicritère* où les éléments de A sont des vecteurs d'évaluations sur plusieurs dimensions, attributs ou critères ; on a alors $A \subseteq A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n$ où A_i est l'ensemble des évaluations possibles d'un objet sur la $i^{\text{ème}}$ dimension,

- la décision dans le *risque* où les éléments de A sont regardés comme des distributions de probabilité sur un ensemble de conséquences ; on a alors $A \subseteq \mathcal{P}(C)$ où $\mathcal{P}(C)$ est un ensemble de mesures de probabilité sur un ensemble de conséquences C,

- la décision dans l'*incertain* où les éléments de A sont caractérisés par des conséquences contingentes à l'occurrence d'« états de la nature » ; on a alors $A \subseteq C^n$ avec C un ensemble de conséquences, en supposant que l'on a retenu n états de la nature distincts.

Dans toutes ces situations, il est tentant d'ajouter à la structure de préordre complet des conditions additionnelles pour tenter de tirer parti de la structure de A. Parmi les conditions les plus fréquemment utilisées, mentionnons :

- *l'indépendance mutuelle au sens des préférences* (Keeney et Raiffa, 1976 ; Krantz et al., 1971 ; Wakker, 1989) dans le cas de la décision multicritère, impliquant que la préférence entre deux objets ne dépend pas d'une évaluation commune sur un sous-ensemble d'attributs :

  $$(a_I, c_{-I}) \; S \; (b_I, c_{-I}) \Leftrightarrow (a_I, d_{-I}) \; S \; (b_I, d_{-I})$$

  où I est un sous ensemble de l'ensemble des dimensions $\{1, 2, \ldots, n\}$ et où (a_I, c_{-I}) désigne l'objet $e \in A$ tel que $e_i = a_i$ si $i \in I$ et $e_i = c_i$ sinon.

- *l'indépendance vis-à-vis de mélanges probabilistes* (Fishburn, 1970, 1988) dans le cas de la décision dans le risque, impliquant que la préférence entre deux distributions de probabilité n'est pas affectée par une même combinaison probabiliste avec une tierce distribution :

  $$a \; S \; b \Leftrightarrow (a\alpha c) \; S \; (b\alpha c)$$

  où $(a\alpha b)$ désigne la combinaison convexe des mesures de probabilité a et b avec le coefficient $\alpha \in]0; 1[$,

– *le principe de la chose sûre* (Fishburn, 1970 ; Savage, 1954 ; Wakker, 1989) dans le cas de la décision dans l'incertain, impliquant que la préférence entre deux objets ne dépend pas d'une évaluation commune sur un sous-ensemble d'états de la nature :

$$(a_I, c_{-I})\ S\ (b_I, c_{-I}) \Leftrightarrow (a_I, d_{-I})\ S\ (b_I, d_{-I})$$

où I est un sous ensemble d'états de la nature et où (a_I, c_{-I}) désigne l'objet $e \in A$ tel que $e_i = a_i$ si $i \in I$ et $e_i = c_i$ sinon.

Lorsque ces conditions additionnelles sont appliquées à des ensembles d'objets « suffisamment riches » (et que l'on impose à S de se comporter de manière cohérente avec cette structure riche, voir Fishburn (1970) ; Wakker (1989)) on obtient alors des modèles célèbres particularisant celui de la théorie classique :

– le modèle d'*utilité additive* dans le cas de la décision multicritère :

$$a\ S\ b \Leftrightarrow \sum_{i=1}^{n} u_i(a_i) \geq \sum_{i=1}^{n} u_i(b_i)$$

où u_i est une fonction de A_i dans $\mathbb{R}$, en notant a_i l'évaluation de l'objet a sur la $i^{\text{ème}}$ dimension,

– le modèle de l'*utilité espérée* dans le cas de la décision dans le risque,

$$a\ S\ b \Leftrightarrow \sum_{c \in C} p_a(c)u(c) \geq \sum_{c \in C} p_b(c)u(c)$$

où u est une fonction de C dans $\mathbb{R}$ et $p_a(c)$ désigne la probabilité d'obtenir la conséquence $c \in C$ avec l'objet a,

– le modèle de l'*utilité espérée subjective* dans le cas de la décision dans l'incertain :

$$a\ S\ b \Leftrightarrow \sum_{i=1}^{n} p_i u(a_i) \geq \sum_{i=1}^{n} p_i u(b_i)$$

où u est une fonction de C dans $\mathbb{R}$ et les p_i sont des nombres non négatifs sommant à 1 pouvant s'interpréter comme les probabilités subjectives des divers états de la nature.

Un des intérêts majeurs de ces modèles est de fournir une représentation numérique de S beaucoup plus spécifique que celle donnée par le théorème 2. Les conditions additionnelles qui viennent d'être mentionnées impliquent que u peut être décomposée de manière additive lorsque la structure de A est suffisamment riche (on suppose généralement par exemple que $A = A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n$ dans le cas multicritère et que chacun des A_i a une structure « riche », voir Wakker (1989)). On obtient sous ces conditions une représentation numérique qui définit une « échelle d'intervalle » (unique au choix de l'origine et de l'unité près). On peut alors mettre en œuvre des techniques spécifiques pour bâtir u et ainsi structurer un modèle de préférence (voir Keeney et Raiffa, 1976 ; Krantz et al., 1971 ; Wakker, 1989).

Ces conditions additionnelles ont été soumises à de très nombreux tests. En particulier, dans le domaine de la décision dans le risque et dans l'incertain, on a montré que les conditions à la base du modèle de l'utilité espérée (axiome d'indépendance et principe de la chose sûre) étaient falsifiées de manière reproductible et prévisible dans de nombreux schémas expérimentaux (voir Allais, 1953 ; Ellsberg, 1961 ; Kahneman et Tversky, 1979 ; McCrimmon et Larsson, 1979). Cette remise en cause a engendré de très nombreuses études cherchant à affaiblir ces conditions tout en continuant à exploiter la structure particulière de A (voir Fishburn (1988) ; Machina (1982) ; Quiggin (1982, 1993) ; Yaari (1987) pour la décision dans le risque et Dubois, Prade et Sabbadin (2001) ; Gilboa (1987) ; Gilboa et Schmeidler (1989) ; Schmeidler (1989) ; Wakker (1989) pour la décision dans l'incertain).

Des arguments de type « Dutch book » (l'adhésion à ces modèles pouvant transformer un individu en « pompe à argent ») ont souvent été utilisés pour critiquer ces modèles étendus (voir Raiffa, 1970). La validité de tels arguments soulève cependant des questions délicates (voir Machina, 1989 ; McClennen, 1990) pour une critique des ces arguments dans le cas de la décision dans le risque).

Mentionnons enfin que de nombreuses autres structures particulières pour A peuvent être utilement étudiées. Par exemple, lorsque A est muni d'une structure topologique, on pourra chercher à obtenir des représentations numériques ayant de bonnes propriétés de continuité (voir, par exemple, Bosi et Mehta, 2002 ; Briges et Mehta, 1995 ; Jaffray, 1975). De même, si A est muni d'une loi de composition interne permettant de combiner ses éléments (c'est, en particulier, le cas avec la décision dans le risque lorsque l'on envisage des « loteries » sur les éléments de A), on pourra chercher à bâtir une représentation numérique qui soit « compatible » (souvent additivement) avec cette loi de composition interne (voir Krantz et al., 1971).

5 Structures de semi-ordre et d'ordre d'intervalle

Dans la structure de préordre total, la relation d'indifférence I est supposée transitive. Cette hypothèse est parfois critiquable dans la mesure où elle impose de supposer une discrimination parfaite entre des objets proches mais distincts. Si de nombreux auteurs ont critiqué la transitivité de l'indifférence sur cette base (ce fait fut déjà mis en évidence par H. Poincaré : « Il arrive que nous sommes capables de distinguer deux impressions l'une de l'autre, tandis que nous ne saurions distinguer chacune d'elles d'une même troisième », La Valeur de la Science, 1935, voir aussi les commentaires historiques de Fishburn et Monjardet (1992)), R.D. Luce (1956) fut le premier à proposer une structure de préférence tolérant de tels phénomènes. Nous lui empruntons le célèbre exemple des tasses de café.

Exemple 4
Considérons un ensemble A consistant en 101 tasses de café numérotées de 0 à 100 et identiques à ceci près qu'il y a i grains de sucre dans la $i^{\text{ème}}$ tasse. Il est naturel de penser qu'un individu cherchant à comparer ces tasses en les goûtant ne sera pas en mesure, sauf à lui supposer des capacités sensorielles hors du commun, de distinguer la différence de taux de sucre entre deux tasses portant des numéros consécutifs. Les comparaisons suivantes :

$$a_0 \; I \; a_1, a_1 \; I \; a_2, \ldots, a_{99} \; I \; a_{100},$$

sont donc très vraisemblables. Supposer la relation I transitive implique alors que l'on devrait observer $a_0 \; I \; a_{100}$, ce qui semble peu réaliste en supposant que notre individu a une préférence pour le café avec ou sans sucre. $\diamond$

Les deux structures de préférence présentées dans cette section visent à modéliser des situations où l'indifférence n'est pas transitive tout en conservant les autres hypothèses (transitivité de P, absence d'incomparabilité) faites jusqu'alors.

5.1 Structure de semi-ordre (parfois appelé quasi-ordre)

5.1.1 Définition

Une structure de préférence S est une structure de semi-ordre ssi :

- S est complète,
- S est de Ferrers,

– S est semi-transitive.

Remarque 20
Il est facile de vérifier qu'une définition équivalente de la structure de semi-ordre consiste à supposer que S est complète et que tout circuit de S contient plus d'arcs I que d'arcs P.

On vérifiera aisément que si S est une structure de semi-ordre :

– P est transitive,

– P est de Ferrers,

– P est semi-transitive,

– $P \cdot I \cdot P \subset P$,

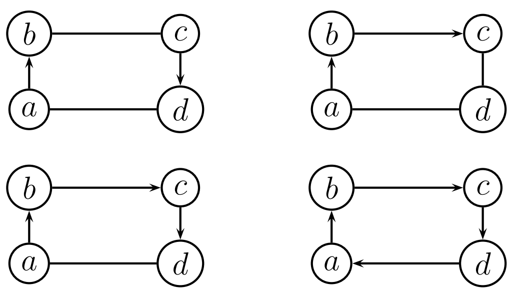
– $P \cdot P \cdot I \subset P$,

– $I \cdot P \cdot P \subset P$,

– $P^2 \cap I^2 = \varnothing$. •

Comme nous le verrons plus loin, la structure de semi-ordre apparaît naturellement dès lors que l'on souhaite introduire un seuil d'indifférence dans la comparaison d'éléments évalués sur une échelle numérique. Le lecteur pourra vérifier à titre d'exercice que toute structure de préordre total est également une structure de semi-ordre.

Remarque 21
La représentation graphique d'un semi-ordre est caractérisée par le fait que les quatre configurations de la figure 9 sont interdites (les diagonales étant quelconques et deux éléments indifférents pouvant être identiques).



•

FIG. 9 – Configurations interdites dans une structure de semi-ordre

5.1.2 Préordre total associé à une structure de semi-ordre

Soit S est une relation binaire dans A. La relation binaire $S^{\pm}$ dans A définie par

$$a\ S^{\pm}\ b \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} b\ S\ c \Rightarrow a\ S\ c, \\ c\ S\ a \Rightarrow c\ S\ b, \end{array} \right\} \forall c \in A$$

est appelée « trace » de S. Il est clair que la trace d'une relation est, par construction, réflexive et transitive. Nous laissons le soin au lecteur de démontrer le résultat suivant :

Théorème 3
Soit S une relation binaire réflexive sur A. S est un semi-ordre si et seulement si sa trace $S^{\pm}$ est complète.

Remarque 22
Lorsque S est un semi-ordre, le préordre total $S^{\pm}$ s'obtient simplement en rangeant les éléments de A selon leur degré dans S. On pourra vérifier à titre d'exercice qu'un préordre total est confondu avec sa trace. •

5.1.3 Représentation matricielle (Jacquet-Lagrèze, 1978)

Si l'on choisit d'ordonner les lignes et les colonnes de la représentation matricielle d'une structure de semi-ordre dans un ordre compatible avec $S^{\pm}$ on obtient une matrice où les 1 sont séparés des 0 par une « frontière en escalier » sous diagonale. Ceci résulte de manière immédiate de la définition de la trace. Contrairement au cas du préordre total, la frontière en escalier sous diagonale séparant les 1 des 0 ne s'appuie pas nécessairement sur la diagonale.

Exemple 5
Soit $A = \{a, b, c, d, e, f\}$. Considérons la structure de préférence suivante $S = \{(a,a), (a,b), (a,c), (a,d), (a,e), (a,f)\ (b,a), (b,b), (b,c), (b,d), (b,e), (b,f), (c,b), (c,c), (c,d), (c,e), (c,f), (d,c), (d,d), (d,e), (d,f), (e,c), (e,d), (e,e), (e,f), (f,e), (f,f)\ \}$. On obtient la représentation matricielle donnée à la figure 10. On remarquera que cette relation n'est pas un préordre total. On a en effet, par exemple, $e\ S\ c$ et $c\ S\ b$ mais $e\ \neg S\ b$. ◇

5.1.4 Représentation numérique

Théorème 4
Soit A un ensemble fini. Les propositions suivantes sont équivalentes :

1. *S est un semi-ordre sur A,*

$\circlearrowleft$	a	b	c	d	e	f
a	1	1	1	1	1	1
b	1	1	1	1	1	1
c	0	1	1	1	1	1
d	0	0	1	1	1	1
e	0	0	1	1	1	1
f	0	0	0	0	1	1

FIG. 10 – Représentation matricielle d'une structure de semi-ordre

2. *il existe une fonction* $g : A \to \mathbb{R}$ *et une constante* $q \geq 0$ *telles que,* $\forall a, b \in A$ *:*
$$a \; S \; b \Leftrightarrow g(a) \geq g(b) - q,$$

3. *il existe une fonction* $g : A \to \mathbb{R}$ *et une fonction* $q : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ *telles que,* $\forall a, b \in A$ *:*
$$g(a) > g(b) \Rightarrow g(a) + q(g(a)) \geq g(b) + q(g(b)),$$
et
$$a \; S \; b \Leftrightarrow g(a) \geq g(b) - q(g(b)).$$

DÉMONSTRATION
Voir Fishburn (1985), Pirlot et Vincke (1997, Theorème 3.1), Scott et Suppes (1958) ou Suppes, Krantz, Luce et Tversky (1989, Chapitre 16) □

Ce résultat montre que la structure de semi-ordre apparaît naturellement lorsque l'on cherche à comparer des objets évalués numériquement en introduisant un seuil constant en dessous duquel une différence n'est plus considérée comme significative d'une relation de préférence stricte. Le seuil n'est pas nécessairement constant pourvu qu'il soit tel que l'on n'ait jamais $g(a) > g(b)$ et $g(b)+q(g(b)) > g(a)+q(g(a))$. Notons que la généralisation de ce résultat à des ensembles de cardinalité quelconque soulève des problèmes délicats (voir, par exemple, Beja et Gilboa, 1992 ; Candeal, Induráin et Zudaire, 2002 ; Fishburn, 1973, 1985)

Remarque 23
À titre d'exemple, on peut construire une représentation numérique de la structure de semi-ordre dont on a présenté plus haut la représentation matricielle. Ayant choisi une valeur arbitraire de q, par exemple $q = 1$, la fonction g sera construite en associant des valeurs croissantes aux éléments f, e, d, c, b, a (c'est-à-dire dans l'ordre inverse du préordre total $S^{\pm}$) tout en satisfaisant

la représentation numérique souhaitée. On pourra ainsi obtenir $g(f) = 0$, $g(e) = 0,5$, $g(d) = 1,1$, $g(c) = 1,2$, $g(b) = 2,15$ et $g(a) = 3$. •

Remarque 24
La représentation numérique d'un semi-ordre n'est évidemment pas unique. Toute transformation strictement croissante appliquée à g fournit une autre représentation acceptable à condition d'appliquer la même transformation à q. Néanmoins toute les représentations numériques d'un semi-ordre ne s'obtiennent pas de cette manière comme le montre l'exemple suivant. L'échelle ainsi construite est plus complexe qu'une échelle ordinale.

Exemple 6
Soit $A = \{a, b, c, d\}$. Considérons la structure de préférence $S = \{(a, d)$, $(a, a), (b, b)$, (c, c), (d, d), (a, b), (b, a), (b, c), (c, b), (b, d), (d, b), (c, d), $(d, c)\}$. Il est facile de vérifier, par exemple en utilisant une représentation matricielle, que cette structure est bien un semi-ordre. Le tableau suivant donne deux représentations numériques de cette structure qui ne peuvent se déduire l'une de l'autre par application d'une transformation strictement croissante.

	a	b	c	d	seuil
g	2	1,1	1	0	1,5
g'	2	1	1	0	1,5

◇

•

5.2 Structure d'ordre d'intervalle

5.2.1 Définition

Une structure de préférence S est une structure d'ordre d'intervalle ssi :

- S est complète,
- S est de Ferrers.

Cette structure généralise clairement toutes les structures présentées jusqu'alors. Comme on le verra plus loin, elle apparaît naturellement lorsque l'on compare des intervalles sur une échelle ordinale.

Remarque 25
Il est facile de vérifier qu'une définition équivalente de la structure d'ordre d'intervalle consiste à supposer que S est complète et que tout circuit de S contient au moins deux arcs I consécutifs.

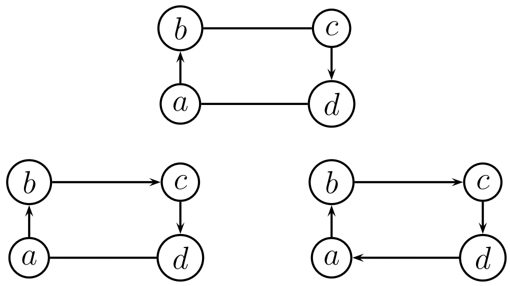
On vérifiera aisément que si S est une structure d'ordre d'intervalle :

– P est transitive,

– P est de Ferrers,

– $P \cdot I \cdot P \subset P$. •

Remarque 26
La représentation graphique d'un ordre d'intervalle est caractérisée par le fait que les trois configurations de la figure 11 sont interdites (les diagonales étant quelconques et deux éléments indifférents pouvant être identiques).



•

FIG. 11 – Configurations interdites dans une structure d'ordre d'intervalle

5.2.2 Préordres totaux associés à une structure d'ordre d'intervalle

Soit S est une relation binaire dans A. On définit une relation binaire S^+ dans A par :

$$a\ S^+\ b \Leftrightarrow [b\ S\ c \Rightarrow a\ S\ c, \forall c \in A].$$

On définit de même la relation S^- par :

$$a\ S^-\ b \Leftrightarrow [c\ S\ a \Rightarrow c\ S\ b, \forall c \in A].$$

La relation S^+ (resp. S^-) est appelée trace droite (resp. gauche) de S. Il est clair que S^+ et S^- sont, par construction, réflexives et transitives.

Nous laissons le soin au lecteur de démontrer le résultat suivant :

Théorème 5
Soit S une relation binaire réflexive dans A. Les trois propositions suivantes sont équivalentes :

1. *S est un ordre d'intervalle,*

2. S^+ est complète,

3. S^- est complète.

Remarque 27
Lorsque S est un ordre d'intervalle, le préordre total S^+ (resp. S^-) s'obtient simplement en rangeant les éléments de A selon leur degré extérieur (resp. intérieur) dans S. •

5.2.3 Représentation matricielle

Choisissons d'ordonner les lignes de la représentation matricielle de façon compatible avec S^+ en prenant soin de ranger les ex aequo selon S^+ dans un ordre compatible avec S^-. Opérons de même sur les colonnes de la matrice en permutant les rôles de S^+ et de S^-. On obtient une matrice où les 1 sont séparés des 0 par une « frontière en escalier » sous diagonale.

Exemple 7
Soit $A = \{a, b, c, d, e, f\}$. Considérons la structure de préférence suivante : $S = \{\ (a, a), (a, b), (a, c), (a, d), (a, e), (a, f), (b, a), (b, b), (b, c), (b, d), (b, e), (b, f), (c, b), (c, c), (c, d), (c, e), (c, f), (d, c), (d, d), (d, e), (d, f), (e, c), (e, d), (e, e), (e, f), (f, e), (f, f)\ \}$.

On obtient la représentation matricielle :

$\circlearrowleft$	a	b	d	c	e	f
a	1	1	1	1	1	1
b	1	1	1	1	1	1
c	0	1	1	1	1	1
d	0	0	1	1	1	1
e	0	0	1	1	1	1
f	0	0	0	1	1	1

Cette structure est donc bien un ordre d'intervalle. Ce n'est pas un semi-ordre puisque l'on a $f\ S\ c$ et $c\ S\ b$ mais $f\ \neg S\ d$ et $d\ \neg S\ b$. Il n'est donc pas possible de représenter cette structure par une matrice en escalier en ordonnant de manière semblable les lignes et les colonnes. ◇

5.2.4 Représentation numérique

On trouvera la démonstration du théorème suivant dans Pirlot et Vincke (1997, Theorème 3.11) ou Fishburn (1985).

Théorème 6
Soit A un ensemble fini. Les propositions suivantes sont équivalentes :

1. S est un ordre d'intervalle sur A,

2. il existe deux fonctions $g : A \to \mathbb{R}$ et $q : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ telles que, $\forall a, b \in A$:

$$a\ S\ b \Leftrightarrow g(a) + q(g(a)) \geq g(b).$$

Pour un aperçu des questions délicates soulevées par la généralisation de ce résultat au cas l'un ensemble quelconque, on se reportera à Briges et Mehta (1995) ; Chateauneuf (1987) ; Fishburn (1973, 1985) ; Nakamura (2002) ; Oloriz, Candeal et Induráin (1998)

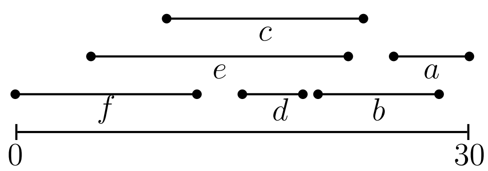
Remarque 28
À titre d'exemple, on peut construire une représentation numérique de la structure d'ordre d'intervalle présentée plus haut comme suit. Les valeurs de la fonction g sont choisies arbitrairement dans l'ordre croissant de la dernière à la première ligne de la matrice. Les valeurs de $g + q$ sont alors définies dans l'ordre croissant de la dernière à la première colonne de la matrice tout en satisfaisant à la représentation voulue. On obtiendra, par exemple, successivement:

$$g(f) = 0, g(e) = 5, g(c) = 10, g(d) = 15, g(b) = 20, g(a) = 25,$$
$$(g+q)(f) = 12, (g+q)(e) = 17, (g+q)(d) = 19,$$
$$(g+q)(c) = 23, (g+q)(b) = 28, (g+q)(a) = 30.$$

En posant $\underline{g} = g$ et $\overline{g} = (g+q)$, on voit que la représentation numérique d'un ordre d'intervalle revient à associer à tout élément $a \in A$ un intervalle $[\underline{g}, \overline{g}]$ tel que :

$$\begin{cases} a\ P\ b \Leftrightarrow \underline{g}(a) > \overline{g}(b), \\ a\ I\ b \Leftrightarrow \begin{cases} \underline{g}(a) \leq \overline{g}(b), \\ \underline{g}(b) \leq \overline{g}(a), \end{cases} \end{cases}$$

ce qui conduit à la représentation ci dessous :



5.3 Remarques

Remarque 29
Il est possible de généraliser la structure de l'ordre d'intervalle en faisant intervenir dans la représentation numérique un seuil dépendant des deux objets comparés. On arrive alors à obtenir une représentation numérique à seuil de toute relation dont la partie asymétrique est sans circuit (Abbas, 1995 ; Abbas et Vincke, 1993 ; Agaev et Aleskerov, 1993 ; Aleskerov et Monjardet, 2002 ; Diaye, 1999 ; Subiza, 1994). Nous n'approfondirons pas ce point ici. •

Remarque 30
Avec une structure de semi-ordre ou d'ordre d'intervalle, la relation P est transitive et, donc, ne comporte pas de circuit. Pour tout sous-ensemble fini et non vide $B \subset A$, $C(B, S)$ sera toujours non vide. Adopter l'une de ces structures ne complique donc pas la question du lien entre préférence et choix. •

Remarque 31
On a vu que lorsque que A a une structure particulière et que S est un préordre total, il est intéressant de tirer parti de cette structure pour arriver à une représentation numérique de S qui soit une échelle d'intervalle. Ces extensions utilisent abondamment la transitivité de l'indifférence pour arriver à ces représentations numériques plus structurée. Il n'est donc pas simple de faire de même avec une structure de semi-ordre ou d'ordre d'intervalle (voir Domotor et Stelzer, 1971 ; Krantz, 1967 ; Luce, 1973 ; Suppes et al., 1989). •

Remarque 32
Imposer d'aboutir à une préférence collective qui soit un semi-ordre ou un ordre d'intervalle ne contribue que très marginalement à résoudre le problème lié à l'agrégation des préférences révélé par le théorème d'Arrow (voir Sen, 1986) : dès lors que $|A| \geq 4$, le théorème reste vrai si l'on impose à la préférence collective d'être complète et de Ferrers (ou complète et semi-transitive). •

6 Structures partielles

Dans toutes les structures envisagées jusqu'alors, on a supposé que S était complète. Cette hypothèse peut paraître naturelle, en particulier si l'on infère les préférences de choix observés. Elle est pourtant critiquable. En effet, il est possible que :

- l'on dispose de très peu d'information sur un ou plusieurs des éléments de A,

– la comparaison des éléments de A implique de réaliser une synthèse entre des points de vues conflictuels,

– les objets à comparer sont peu familiers à la personne devant les comparer.

Dans ces situations, il peut se révéler utile, au niveau de la modélisation des préférences, de faire apparaître explicitement des situations d'incomparabilités (Flament, 1983 ; Roy, 1985).

6.1 L'ordre partiel

Une structure de préférence S est une structure d'ordre partiel ssi :

– S est réflexive,

– S est antisymétrique,

– S est transitive.

Intuitivement la structure d'ordre partiel correspond à une situation où étant donné deux objets distincts, soit l'un des deux est préféré à l'autre, soit ils sont incomparables, la relation de préférence étant transitive.

Remarque 33
On vérifiera aisément que si S est une structure d'ordre partiel :

– P est transitive,

– I est restreinte aux boucles. •

Un résultat fondamental (voir Dushnik et Miller (1941) ou Fishburn (1985)) montre que tout ordre partiel sur un ensemble fini peut s'obtenir comme l'intersection d'un nombre fini d'ordre totaux. Le nombre minimal d'ordre totaux qu'il faut intersecter pour trouver la structure d'ordre partiel est la *dimension* de l'ordre partiel. On tire facilement de ce résultat le théorème suivant.

Théorème 7
Soit A un ensemble fini. Les propositions suivantes sont équivalentes :

1. *S est un ordre partiel sur A,*

2. *il existe une fonction $g : A \to \mathbb{R}$ telle que, $\forall a, b \in A$:*

$$\begin{cases} a \; S \; b \Rightarrow g(a) \geq g(b), \\ g(a) = g(b) \Rightarrow a = b. \end{cases}$$

Exemple 8
Soit $A = \{a, b, c, d, e\}$. Considérons la structure de préférence : $S = \{ (a,a), (a,b), (a,c), (a,d), (b,b), (b,d), (b,e), (c,c), (c,e), (d,d), (d,e), (e,e) \}$. Une représentation graphique de cette structure est donnée à la figure 12.

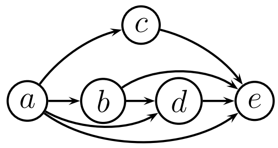


FIG. 12 – Représentation graphique d'un ordre partiel

On vérifiera aisément qu'il s'agit d'un ordre partiel de dimension 2 qui s'obtient par intersection des deux ordre totaux (en utilisant des notations évidentes) :

$$a > b > d > c > e \text{ et}$$
$$a > c > b > d > e.$$

Notons que la détection d'un ordre partiel de dimension 2 peut s'opérer en temps polynomial. En revanche le problème général de la détermination de la dimension d'un ordre partiel est NP-difficile (Doignon, Ducamp et Falmagne, 1984 ; Fishburn, 1985) $\diamond$

6.2 Le préordre partiel

Une structure de préférence S est une structure de préordre partiel ssi :

- S est réflexive,
- S est transitive.

La structure de préordre partiel généralise celle d'ordre partiel en introduisant de possibles ex aequo, la relation d'indifférence étant transitive.

Remarque 34
On vérifiera aisément que si S est une structure de préordre partiel :

- P est transitive,
- I est transitive,
- $P \cdot I \subset P$,
- $I \cdot P \subset P$. $\bullet$

De même que pour la structure d'ordre partiel, il est facile de montrer que toute structure de préordre partiel sur un ensemble fini peut s'obtenir comme l'intersection d'un nombre fini de préordre totaux (voir Bossert, Sprumont et Suzumura, 2002 ; Donaldson et Weymark, 1998). On tire facilement de ce résultat le théorème suivant.

Théorème 8
Soit A un ensemble fini. Les propositions suivantes sont équivalentes :

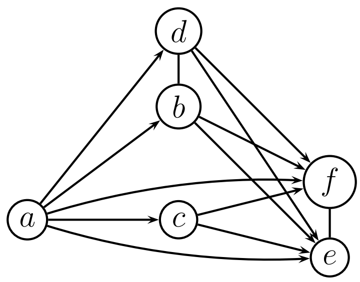
1. *S est un préordre partiel sur A,*

2. *il existe une fonction $g : A \to \mathbb{R}$ telle que, $\forall a, b \in A$:*

$$a \; S \; b \Rightarrow g(a) \geq g(b),$$

Remarque 35
On pourra alternativement chercher à représenter un préordre partiel par un ensemble de représentations numériques de préordres totaux. Sur ce point voir Ok (2002). •

Exemple 9
Soit $A = \{a, b, c, d, e, f\}$. Considérons la structure de préférence $S = (a, a), (a, b), (a, c), (a, d), (a, e), (a, f)$ $(b, b), (b, d), (b, e), (b, f), (c, c), (c, e), (c, f), (d, b), (d, d), (d, e), (d, f), (e, e), (e, f), (f, e), (f, f)\}$. On vérifiera aisément qu'il s'agit bien d'un préordre partiel dont la représentation graphique est donnée à la figure 13.



◇

Fig. 13 – Représentation graphique d'un préordre partiel

Remarque 36
Il est possible d'étendre les modèles classiques de décision dans le risque pour traiter le cas d'un préordre partiel (Aumann, 1962 ; Fishburn, 1970). Le cas multiattribut n'a été étudié en détail que dans le cas fini (Fishburn, 1970 ; Scott, 1964). Mentionnons enfin qu'autoriser une structure de préférence incluant des incomparabilités ne contribue que marginalement à résoudre le problème soulevé par le théorème d'Arrow (voir Weymark, 1984). •

Remarque 37
On trouvera dans Roubens et Vincke (1985) des propositions de définitions des structures de semi-ordre partiel et d'ordre d'intervalle partiel. Celles-ci permettent de faire coexister une relation d'indifférence non transitive et une relation d'incomparabilité. Nous n'approfondirons pas ce point ici. •

6.3 Synthèse

On résume à la figure 14 l'ensemble des structures présentées jusqu'à présent.

Structures	**Définition**
Ordre total	S complète S antisymétrique S transitive
Préordre total	S complète S transitive
Semi-ordre	S complète S de Ferrers S semi-transitive
Ordre d'intervalle	S complète S de Ferrers
Ordre partiel	S réflexive S antisymétrique S transitive
Préordre partiel	S réflexive S transitive

FIG. 14 – Structures de préférence les plus usitées

7 Conclusion

7.1 Autres structures de préférence

Dans toutes les structures envisagées jusqu'ici, la relation P était transitive et donc ne comportait pas de circuits. Cette hypothèse est naturelle. La remettre en cause complique singulièrement l'analyse des liens entre « choix » et « préférence », comme on l'a vu. Il est néanmoins possible d'observer expérimentalement de telles structures de préférence (voir May, 1954 ; Tversky,

1969) lorsque l'on demande à des sujets de comparer des objets évalués selon plusieurs dimensions. Elles apparaissent également naturellement dans le cadre de la théorie des élections en raison de l'effet Condorcet. Un résultat célèbre (McGarvey, 1953) montre qu'avec la méthode de la majorité simple, toute structure de préférence complète sur A peut apparaître. Avec d'autres méthodes d'agrégation, il est même possible d'observer toute structure de préférence réflexive (Bouyssou, 1996).

Le traitement de telles structures a amené de nombreux travaux en théorie du choix social sur les procédures de choix adéquates avec de telles structures. Le cas particulier des *tournois* (relations complètes et antisymétriques) a été particulièrement étudié (Laslier, 1997 ; Moulin, 1986).

Plus récemment, on a montré que, contrairement à l'intuition, il n'est pas impossible de parvenir à une représentation numérique de tels modèles (voir Bouyssou, 1986 ; Bouyssou et Pirlot, 1999, 2002 ; Fishburn, 1982, 1988, 1991a,b, 1992 ; Tversky, 1969 ; Vind, 1991). Dans les modèles étudiés par Bouyssou et Pirlot (2002), on a ainsi pour des ensembles A ayant une structure de produit cartésien (comme dans le cas de la décision multicritère ou de la décision dans l'incertain) :

$$a\ S\ b \Leftrightarrow F(p_1(a_1, b_1), p_2(a_2, b_2), \ldots, p_n(a_n, b_n)) \geq 0$$

où les p_i sont des fonctions de A_i^2 dans $\mathbb{R}$, F est une fonction de $\prod_{i=1}^{n} p_i(A_i^2)$ dans $\mathbb{R}$ et où, par exemple, F est croissante en chacun de ses arguments. Un tel modèle généralise le modèle classique de différences additives proposé par Tversky (1969) dans lequel :

$$a\ S\ b \Leftrightarrow \sum_{i=1}^{n} \varphi_i(u_i(a_i) - u_i(b_i)) \geq 0$$

où les u_i sont des fonctions de A_i dans $\mathbb{R}$, et les φ sont des fonctions impaires strictement croissantes dans $\mathbb{R}$.

De même, dans les modèles étudiés par Fishburn (1982, 1988) dans le cas de la décision dans le risque, la représentation numérique est du type :

$$a\ S\ b \Leftrightarrow \sum_{c \in C} \sum_{c' \in C} p_a(c) p_b(c') \phi(c, c') \geq 0$$

où ϕ est une fonction de C^2 dans $\mathbb{R}$ et $p_a(c)$ désigne la probabilité d'occurrence de la conséquence $c \in C$ avec l'objet a.

Une critique fréquente de ces modèles est que la présence d'intransitivité (de l'indifférence ou de la préférence stricte) laisse la porte ouverte à un grand nombre de comportements « irrationnels » et à l'application d'arguments de type « Dutch Book » (Raiffa, 1970). Comme dans le cas de la décision dans le risque déjà évoqué, il n'est pas certain que la portée de ces arguments soit décisive (on consultera à ce sujet Fishburn, 1991b).

7.2 Autres problèmes

Ce très rapide tour d'horizon des structures classiques utilisées en modélisation des préférences aura, nous l'espérons, permis au lecteur non-spécialiste de se forger des points de repère dans une littérature très vaste et souvent technique qui lui permettront d'aborder les chapitres suivants. Notons cependant que notre bref tour d'horizon a laissé de côté bien des questions. Parmi les plus importantes, mentionnons :

- la question de l'approximation d'une structure de préférence par une autre, par exemple, la recherche d'un ordre total à distance minimale d'un tournoi (voir sur cette question difficile Barthélémy, Guénoche et Hudry, 1989 ; Barthélémy et Monjardet, 1981 ; Bermond, 1972 ; Charon-Fournier, Germa et Hudry, 1992 ; Hudry et Woirgard, 1996 ; Monjardet, 1979 ; Slater, 1961)
- la manière de recueillir et de valider une information préférentielle dans un contexte donné (voir von Winterfeldt et Edwards, 1986),
- les liens entre le problème de la modélisation des préférences et la question de la signifiance dans la théorie du mesurage (voir Roberts, 1979),
- l'analyse statistique de données de préférences (voir Coombs, 1964 ; Green, Tull et Albaum, 1988),
- des interrogations plus fondamentales sur les liens entre préférences et système de valeurs ainsi que la nature même de ces valeurs (voir Broome, 1991 ; Cowan et Fishburn, 1988 ; Tsoukiàs et Vincke, 1992 ; von Wright, 1963).

Références

Abbas, M. (1995), Any complete preference structure withour circuit admits an interval representation, *Theory and Decision* **39**, 115–126.

Abbas, M. et Vincke, Ph. (1993), Preference structures and threshold models, *Journal of Multicriteria Decision Analysis* **2**, 171–178.

Agaev, R. et Aleskerov, F. (1993), Interval choice: Classic and general cases, *Mathematical Social Sciences* **26**, 249–272.

Aleskerov, F. et Monjardet, B. (2002), *Utility Maximization, Choice and Preference*, Springer-Verlag, Heidelberg.

Allais, M. (1953), Le comportement de l'homme rationnel devant le risque : Critique des postulats et axiomes de l'école américaine, *Econometrica* **21**, 503–46.

Arrow, K.J. (1963), *Social choice and individual values*, deuxième édition, Wiley, New York.

Aumann, R.J. (1962), Utility theory without the completeness axiom, *Econometrica* **30**, 445–462. Correction: Econometrica, 1964, vol. 32, 1–2.

Bana e Costa, C.A. et Vansnick, J.-C. (1994), Macbeth – An interactive path towards the construction of cardinal value functions, *International Transactions in Operational Research* **1**(4), 489–500.

Barthélémy, J.-P., Guénoche, A. et Hudry, O. (1989), Median linear orders: Heuristics and a branch and bound algorithm, *European Journal of Operational Research* pp. 313–325.

Barthélémy, J.-P. et Monjardet, B. (1981), The median procedure in cluster analysis and social choice theory, *Mathematical Social Sciences* pp. 235–267.

Beardon, A.F., Candeal, J.C., Herden, G., Induráin, E. et Mehta, G.B. (2002), The non-existence of a utility function and the structure of non-representatble preference relations, *Journal of Mathematical Economics* **37**, 17–38.

Beja, A. et Gilboa, I. (1992), Numerical representations of imperfectly ordered preferences (a unified geometric exposition), *Journal of Mathematical Psychology* **36**, 426–449.

Bell, D.E., Raiffa, H. et Tversky, A. (1988), Descriptive, normative, and prescriptive interactions in decision making, *in* D.E. Bell, H. Raiffa et A. Tversky (éds), *Decision making: Descriptive, normative, and prescriptive interactions in decision making*, Cambridge University Press, pp. 9–32.

Bergstrom, T.X. (1975), Maximal elements of acyclic relations on compact sets, *Journal of Economic Theory* **10**, 403–404.

Bermond, J.-C. (1972), Ordres à distance minimum d'un tournoi et graphes partiels sans circuits maximaux, *Mathématiques et Sciences Humaines* **37**, 5–25.

Bosi, G. et Mehta, G. B. (2002), Existence of a semicontinuous or continuous utility function: a unified approach and an elementary proof, *Journal of Mathematical Economics* **38**, 311–328.

Bossert, W., Sprumont, Y. et Suzumura, K. (2002), Upper semicontinuous extensions of binary relations, *Journal of Mathematical Economics* **37**, 231–246.

Bouyssou, D. (1986), Some remarks on the notion of compensation in MCDM, *European Journal of Operational Research* **26**, 150–160.

Bouyssou, D. (1996), Outranking relations: do they have special properties?, *Journal of Multiple Criteria Decision Analysis* **5**, 99–111.

Bouyssou, D. et Pirlot, M. (1999), Conjoint measurement without additivity and transitivity, *in* N. Meskens et M. Roubens (éds), *Advances in Decision Analysis*, Kluwer, Dordrecht, pp. 13–29.

Bouyssou, D. et Pirlot, M. (2002), Non transitive decomposable conjoint measurement, à paraître dans *Journal of Mathematical Psychology* .

Bouyssou, D. et Vincke, Ph. (2003), Une introduction à la modélisation des préférences, à paraître dans *INFOR* .

Briges, D.S. et Mehta, G.B. (1995), *Representations of preference orderings*, Springer-Verlag, Berlin.

Broome, J. (1991), *Weighting goods*, Basil Blackwell, London.

Campbell, D.E. et Kelly, J.S. (2002), Impossibility theorems in the Arrovian framework, *in* K.J. Arrow, S. A.K. et K. Suzumura (éds), *Handbook of social choice and welfare*, Vol. 1, North-Holland, Amsterdam, pp. 35–94.

Candeal, J.C., Induráin, E. et Zudaire, M. (2002), Numerical representability of semiorders, *Mathematical Social Sciences* **43**, 61–77.

Charon-Fournier, I., Germa, A. et Hudry, O. (1992), Utilisation des scores dans des méthodes exactes déterminant les ordres médians des tournois, *Mathématiques, Informatique et Sciences Humaines* **119**, 53–74.

Chateauneuf, A. (1987), Continuous representation of a preference relation on a connected topological space, *Journal Mathematical Economics* **16**, 139–146.

Coombs, C.H. (1964), *A theory of data*, Wiley, New York.

Cowan, T.A. et Fishburn, P.C. (1988), Foundations of preference, *in* G. Eberlein et H. Berghel (éds), *Essays in Honor of Werner Leinfellner*, D. Reidel, Dordrecht, pp. 261–271.

Debreu, G. (1954), Representation of a preference ordering by a numerical function, *in* R. Thrall, C. Coombs et R. Davies (éds), *Decision Processes*, Wiley, New York, pp. 159–175.

Debreu, G. (1959), *Theory of value: an axiomatic analysis of economic equilibrium*, John Wiley & Sons Inc., New York.

Diaye, M.-A. (1999), Variable interval models, *Mathematical Social Sciences* **38**, 21–33.

Doignon, J.-P. (1987), Threshold representation of multiple semiorders, *SIAM Journal on Algebraic and Discrete Methods* **8**, 77–84.

Doignon, J.-P., Ducamp, A. et Falmagne, J.-C. (1984), On realizable biorders and the biorder dimension of a relation, *Journal of Mathematical Psychology* **28**, 73–109.

Doignon, J.-P., Monjardet, B., Roubens, M. et Vincke, Ph. (1986), Biorder families, valued relations and preference modelling, *Journal of Mathematical Psychology* **30**(4), 435–480.

Domotor, Z. et Stelzer, J. (1971), Representation of finitely additive semiordered qualitative probability structures, *Journal of Mathematical Psychology* **8**, 145–168.

Donaldson, D. et Weymark, J. A. (1998), A quasiordering is the intersection of orderings, *Journal of Economic Theory* **78**, 382–387.

Doyle, J. et Wellman, M. (1992), Modular utility representation for decision-theoretic planning, *Proceedings of the First International Conference on Artificial Intelligence Planning Systems*, pp. 236–242.

Dubois, D., Prade, H. et Sabbadin, R. (2001), Decision-theoretic foundations of qualitative possibility theory, *European Journal of Operational Research* **128**, 459–78.

Dushnik, B. et Miller, E. (1941), Partially ordered sets, *American Journal of Mathematics* **63**, 600–610.

Ellsberg, D. (1961), Risk, ambiguity and the Savage axioms, *Quarterly Journal of Economics* **75**, 643–669.

Fishburn, P.C. (1970), *Utility theory for decision-making*, Wiley, New-York.

Fishburn, P.C. (1973), Interval representations for interval orders and semiorders, *Journal of Mathematical Psychology* **10**, 91–105.

Fishburn, P.C. (1982), Nontransitive measurable utility, *Journal of Mathematical Psychology* **26**, 31–67.

Fishburn, P.C. (1985), *Interval orders and intervals graphs*, Wiley, New-York.

Fishburn, P.C. (1988), *Nonlinear preference and utility theory*, Johns Hopkins University Press, Baltimore.

Fishburn, P.C. (1991a), Nontransitive additive conjoint measurement, *Journal of Mathematical Psychology* **35**, 1–40.

Fishburn, P.C. (1991b), Nontransitive preferences in decision theory, *Journal of Risk and Uncertainty* **4**, 113–134.

Fishburn, P.C. (1992), Additive differences and simple preference comparisons, *Journal of Mathematical Psychology* **36**, 21–31.

Fishburn, P.C. et Monjardet, B. (1992), Norbert Wiener on the theory of measurement (1914, 1915, 1921), *Journal of Mathematical Psychology* **36**, 165–184.

Flament, Cl. (1983), On incomplete preference structures, *Mathematical Social Sciences* **5**, 61–72.

Fodor, J. et Roubens, M. (1994), *Fuzzy preference modelling and multiple criteria decision support*, Kluwer, Dordrecht.

Gilboa, I. (1987), Expected utility with purely subjective non-additive probabilities, *Journal of Mathematical Economics* **16**, 65–68.

Gilboa, I. et Schmeidler, D. (1989), Maxmin expected utility with a non-unique prior, *Journal of Mathematical Economics* **18**, 141–153.

Green, P.E., Tull, D.S. et Albaum, G. (1988), *Research for marketing decisions*, Englewood Cliffs.

Hudry, O. et Woirgard, F. (1996), Ordres médians et ordres de Slater des tournois, *Mathématiques, Informatique et Sciences Humaines* **133**, 23–56.

Jacquet-Lagrèze, E. (1978), Représentation de quasi-ordres et de relations probabilistes transitives sous forme standard et méthodes d'approximation, *Mathématiques et Sciences Humaines* **63**, 5–25.

Jaffray, J.-Y. (1975), Existence of a continuous utility function: an elementary proof, *Econometrica* **43**, 981–983.

Kahneman, D., Slovic, P. et Tversky, A. (1981), *Judgement under uncertainty – Heuristics and biases*, Cambridge University Press, Cambridge.

Kahneman, D. et Tversky, A. (1979), Prospect theory: An analysis of decision under risk, *Econometrica* **47**, 263–291.

Keeney, R.L. et Raiffa, H. (1976), *Decisions with multiple objectives: Preferences and value tradeoffs*, Wiley, New-York.

Krantz, D. H. (1967), Extensive measurement in semiorders, *Philosophy of Science* **34**, 348–362.

Krantz, D.H., Luce, R.D., Suppes, P. et Tversky, A. (1971), *Foundations of measurement,* vol. 1: *Additive and polynomial representations*, Academic Press, New-York.

Laslier, J.-F. (1997), *Tournament solutions and majority voting*, Springer-Verlag, Berlin.

Luce, R.D. (1956), Semi-orders and a theory of utility discrimination, *Econometrica* **24**, 178–191.

Luce, R.D. (1973), Three axiom systems for additive semiordered structures, *SIAM Journal of Applied Mathematics* **25**, 41–53.

Machina, M.J. (1982), Expected utility without the independence axiom, *Econometrica* **50**, 277–323.

Machina, M.J. (1989), Dynamic consistency and non-expected utility models of choice under uncertainty, *Journal of Economic Literature* **27**, 1622–1688.

Malishevski, A.V. (1993), Criteria for judging the rationality of decisions in the presence of vague alternatives, *Mathematical Social Sciences* **26**, 205–247.

May, K.O. (1954), Intransitivity, utility and the aggregation of preference patterns, *Econometrica* **22**, 1–13.

McClennen, E.L. (1990), *Rationality and dynamic choice: Foundational explorations*, Cambridge University Press.

McCrimmon, K.R. et Larsson, S. (1979), Utility theory: Axioms versus paradoxes, *in* M. Allais et O. Hagen (éds), *Expected utility hypotheses and the Allais paradox*, D. Reidel, Dordrecht, pp. 27–145.

McGarvey, D.C. (1953), A theorem on the construction of voting paradoxes, *Econometrica* **21**, 608–610.

Monjardet, B. (1978), Axiomatiques et propriétés des quasi-ordres, *Mathématiques et Sciences Humaines* **63**, 51–82.

Monjardet, B. (1979), Relations à éloignement minimum de relations binaires : note bibliographique, *Mathématiques, Informatique et Sciences Humaines* **67**, 115–122.

Moulin, H. (1986), Choosing from a tournament, *Social Choice and Welfare* **3**, 271–291.

Nakamura, Y. (2002), Real interval representations, *Journal of Mathematical Psychology* **46**, 140–177.

Ok, E. A. (2002), Utility representation of an incomplete preference relation, *Journal of Economic Theory* **104**, 429–449.

Oloriz, E., Candeal, J.C. et Induráin, E. (1998), Representability of interval orders, *Journal of Economic Theory* **78**, 219–227.

Perny, P. et Roy, B. (1992), The use of fuzzy outranking relations in preference modelling, *Fuzzy Sets and Systems* **49**, 33–53.

Pirlot, M. et Vincke, Ph. (1997), *Semiorders. Properties, representations, applications*, Kluwer, Dordrecht.

Quiggin, J. (1982), A theory of anticipated utility, *Journal of Economic Behaviour and Organization* **3**, 323–343.

Quiggin, J. (1993), *Generalized expected utility theory – The rank-dependent model*, Kluwer, Dordrecht.

Raiffa, H. (1970), *Decision analysis – Introductory lectures on choices under uncertainty*, Addison-Wesley, Reading.

Roberts, F.S. (1979), *Measurement theory with applications to decision making, utility and the social sciences*, Addison-Wesley, Reading.

Roubens, M. et Vincke, Ph. (1985), *Preference modelling*, Springer Verlag, Berlin.

Roy, B. (1985), *Méthodologie multicritère d'aide à la décision*, Economica, Paris.

Roy, B. et Vincke, P. (1987), Pseudo-orders: definition, properties and numerical representation, *Mathematical Social Sciences* **14**, 263–274.

Savage, L. (1954), *The foundations of statistics*, 1972, 2nd revised édition, Wiley, New York.

Schmeidler, D. (1989), Subjective probability and expected utility without additivity, *Econometrica* **57**, 571–587.

Schwartz, T. (1986), *The logic of collectice choice*, Columbia University Press.

Scott, D. (1964), Measurement structures and linear inequalities, *Journal of Mathematical Psychology* **1**, 233–247.

Scott, D. et Suppes, P. (1958), Foundational aspects of theories of measurement, *Journal of Symbolic Logic* **23**, 113–128.

Sen, A.K. (1970), *Collective choice and social welfare*, Holden Day, San Francisco.

Sen, A.K. (1977), Social choice theory: A re-examination, *Econometrica* **45**, 53–89.

Sen, A.K. (1986), Social choice theory, *in* K.J. Arrow et M.D. Intriligator (éds), *Handbook of mathematical economics*, Vol. 3, North-Holland, Amsterdam, pp. 1073–1181.

Sen, A.K. (1993), Internal consistency of choice, *Econometrica* **61**, 495–521.

Slater, P. (1961), Inconsistencies in a schedule of paired comparisons, *Biometrika* **48**, 303–312.

Subiza, B. (1994), Numerical representation of acyclic preferences, *Journal of Mathematical Psychology* **38**, 467–476.

Sugden, R. (1985), Why be consistent? a critical analysis of consistency requirements in choice theory, *Economica* **52**, 167–183.

Suppes, P., Krantz, D.H., Luce, R.D. et Tversky, A. (1989), *Foundations of measurement,* vol. 2: *Geometrical, threshold, and probabilistic representations*, Academic Press, New York.

Tsoukiàs, A. et Vincke, Ph. (1992), A survey on nonconventional preference modelling, *Ricerca Operativa* **61**, 5–49.

Tsoukiàs, A. et Vincke, Ph. (1995), A new axiomatic foundation of partial comparability, *Theory and Decision* **39**, 79–114.

Tsoukiàs, A. et Vincke, Ph. (1997), Extended preference structures in MCDA, *in* J. Climaco (éd.), *Multicriteria Analysis*, Springer-Verlag, Berlin, pp. 37–50.

Tversky, A. (1969), Intransitivity of preferences, *Psychological Review* **76**, 31–48.

Vind, K. (1991), Independent preferences, *Journal of Mathematical Economics* **20**, 119–135.

von Winterfeldt, D. et Edwards, W. (1986), *Decision analysis and behavioral research*, Cambridge University Press, Cambridge.

von Wright, G.H. (1963), *The logic of preference*, Edinburgh University Press, Edinburgh.

Wakker, P.P. (1989), *Additive representations of preferences: A new foundation of decision analysis*, Kluwer, Dordrecht.

Weymark, J. (1984), Arrow's theorem with quasi-orderings, *Public Choice* **42**, 235–246.

Yaari, M.E. (1987), The dual theory of choice under risk, *Econometrica* **55**, 95–115.