

Flexibilité du blending dynamique avec gammes alternatives et stock de sécurité : mise en œuvre sur une chaîne logistique minière

AHLAM AZZAMOURI¹, MOUNA BAMOUMEN^{1,2}, HAJAR HILALI^{1,2}, VINCENT HOVELAQUE^{1,2}, VINCENT GIARD^{1,3}

¹ EMINES- UNIVERSITE MOHAMMED VI POLYTECHNIQUE, Benguerir, Maroc

² UNIV RENNES, CNRS, CREM - UMR 6211, F-35000 Rennes, France

³ PARIS-DAUPHINE, PSL RESEARCH UNIVERSITY, 75016, Paris, France

[Ahlam.Azzamouri, Mouna.Bamoumen, Hajar.Hilali, Vincent.Hovelaque, Vincent.Giard](mailto:Ahlam.Azzamouri, Mouna.Bamoumen, Hajar.Hilali, Vincent.Hovelaque, Vincent.Giard}@emines.um6p.mamailto:prenom.nom@adresse.fr) @emines.um6p.mamailto:prenom.nom@adresse.fr

Résumé - Nous présentons un modèle de détermination dynamique optimale définissant simultanément : *i*) les blends de minerais de phosphate extraits (Qualité Source – QS) permettant d’obtenir des qualités marchandes (QM) en quantités demandées, sous contrainte de respect de composition ; *ii*) l’alimentation de ces QS en provenance de la mine. Ce modèle de «blending dynamique» prend en compte : la variabilité de la composition chimique des minerais, les quantités de QS en stock ou prêtes à être acheminées de la mine, les contraintes de stockage, la disponibilité des processeurs de *blending*, l’ordonnancement des OF à satisfaire et l’existence de gammes alternatives permettant d’opérer une concentration de la teneur de certains composants de ces QM, et maîtriser leurs granulométries. Le blend optimal d’une même QM varie alors au cours du temps, en fonction du contexte de production des OF concernés. Pour répondre aux demandes non prévisibles mais relevant de scénarios plausibles, la flexibilité offerte par le *blending* dynamique ne suffit pas et doit être complétée par des stocks de sécurité de certaines QS, dont la définition ne peut relever des approches classiques de définition de ces stocks en univers aléatoire. Cette modélisation, en cours d’adoption, est illustrée par des exemples numériques.

Abstract - We present an optimal dynamic determination model defining simultaneously: *i*) the blends of extracted phosphate ores (Source Quality - SQ) allowing to obtain merchantable qualities (MQ) in requested quantities, under constraint of respect of composition; *ii*) the feedings of these SQ from the mine. This model of "dynamic blending" takes into account: the variability of the chemical composition of ores, the quantities of SQ in stock or ready to be conveyed from the mine, the storage constraints, the availability of blending processors, the schedule of orders to satisfy and the existence of alternative routings to operate a grade concentration of some components of these MQ and to control their granulometry. The optimal blend of a given MQ varies over time, depending on the production context of the orders. To respond to unpredictable but plausible scenario demands, the flexibility offered by dynamic blending is not sufficient and must be complemented by security stocks of certain SQ, the definition of which cannot be captured by traditional approaches to defining these stocks on random universe. This modeling, currently being adopted, is illustrated by numerical examples.

Mots clés - *Blending* dynamique, mine, gammes alternatives, stock de sécurité, gestion des risques.

Keywords – Dynamic *blending*, mine, alternative routings, security stock, risk management.

1 INTRODUCTION

Le problème du *blending* est le premier problème de Programmation Linéaire résolu par Dantzig en 1947, avec sa méthode du simplex, et ce pour déterminer un régime alimentaire efficace au moindre coût (Dantzig, 1982). Durant les soixante-dix dernières années, beaucoup de problèmes industriels traitant le *blending* sont apparus, certains d’entre eux relevant de l’industrie minière. Le problème étudié dans cet article est plus vaste : il lie le *blending* à d’autres problèmes en amont et aval d’une chaîne logistique (CL) phosphorique.

Le Groupe OCP est la plus grande entreprise marocaine. Il joue un rôle clé dans le marché international des phosphates. Sa CL intégrée relie différents processus d’extraction et de mélange de minerais, de production et d’exportation d’acide phosphorique et d’engrais. Elle comprend trois axes indépendants : l’axe nord, centre et sud. Ce papier s’intéresse à Ben Guerir, sous-ensemble de l’axe centre, qui inclut une mine, de laquelle 14 minerais de différentes caractéristiques chimiques sont extraits et utilisés comme inputs (appelés Qualités Sources (QS)) dans une

installation de *blending*, afin de produire cinq différents minerais de phosphate (outputs définis comme Qualités Marchandes (QM)), dont la composition chimique est contrainte (voir illustration au tableau 1). Le processus d’extraction peut être perçu comme un système push. Les QM sont essentiellement produites à la demande, et donc le processus de *blending* peut être perçu comme un système pull.

Après *blending*, certaines QM sont directement exportées alors que d’autres font l’objet d’un traitement complémentaire dans une laverie avant d’être exportées ou utilisées pour la production d’acide destiné à l’exportation ou à la fabrication d’engrais destinés à l’export (voir Figure 1). Les opérations de traitement dans les laveries impliquent des changements de caractéristiques chimiques et physiques des QM pour en améliorer la qualité.

L’approche du *blending* dynamique proposée ici combine dix caractéristiques, qui la rendent unique dans la liste des problèmes de *blending* répertoriés. Les inputs (QS) ne sont pas achetés mais extraits d’une mine à ciel ouvert, caractérisée par un empilement de couches homogènes de QS, le plus souvent séparées par une couche de stérile, inutilisable. Une QS dans une certaine zone de

la mine n'est accessible que si les couches supérieures sont dégagées. Le programme d'extraction minière conditionne donc l'accès plus ou moins rapide aux QS localisées dans certaines zones du gisement. L'approvisionnement en QS se caractérise par huit spécificités décrites ci-après (*a* à *h*). Comme plusieurs gammes de *blending* peuvent être utilisées, les caractéristiques *i* et *j* doivent être prises en compte. Enfin, les caractéristiques de la demande dans cette CL posent un problème particulier de management du risque en univers incertain (caractéristique *k*).

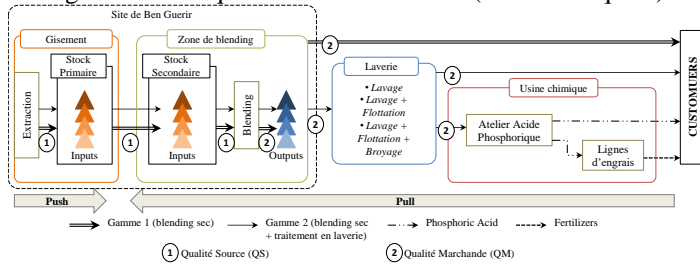


Figure 1. Chaîne Logistique de l'Axe Centre

- Caractéristique *a*) la programmation tactique de l'extraction conduit à des échéanciers d'approvisionnement de QS correspondant à des flux poussés qui peuvent ne pas être accessibles immédiatement (stock primaire de la Figure 1).
- Caractéristique *b*) La zone de *blending* dispose d'un stock de QS de capacité limitée (stock secondaire de la Figure 1).
- Caractéristique *c*) Deux convoyeurs alimentent le stock secondaire à partir de stocks primaires de QS disponibles à certains endroits du gisement et composé de minerais prêts à être transportés.
- Caractéristique *d*) Le programme d'extraction impose l'enlèvement de QS situées dans le stock primaire au plus tard à une certaine date, afin de permettre l'accès aux couches inférieures d'autres QS.
- Caractéristique *e*) Les contraintes *a*, *b* et *d* peuvent conduire au stockage provisoire de QS (stock qualifié de « tout-venant ») avant reprise ultérieure possible. Ces opérations ont un coût et sont sans valeur ajoutée. La création possible de ces stocks de tout-venant est fortement pénalisée dans le modèle pour éviter d'explorer des solutions pouvant conduire à cette création.
- Caractéristique *f*) L'estimation de la composition d'une couche de minerai situé dans une zone du gisement est utilisée pour définir le programme tactique d'extraction. Des prélèvements additionnels affinent ces informations lorsque l'extraction est sur le point de se faire. La différence entre la composition initialement prévue et celle trouvée est parfois suffisamment importante pour traiter ces minerais comme inputs distincts, à stocker séparément dans le stock secondaire pour assurer un *blending* reposant sur des informations fiables sur la composition des inputs.
- Caractéristique *g*) Toutes les QM produites par *blending* doivent respecter la charte qualité. Deux d'entre elles, appelées QM internes, sont utilisées en aval pour produire deux types d'acide phosphorique. Deux lots successifs d'une QM interne respectent la charte qualité sans avoir la même composition. Cette instabilité de composition perturbe la production d'acide phosphorique, obligeant à des réglages pouvant être importants. Le pilotage du *blending* vise principalement à stabiliser la composition des lots d'outputs internes en cherchant à se rapprocher de valeurs-cibles des composants d'un output interne, définies en accord avec les responsables de l'atelier phosphorique.
- Caractéristique *h*) Les caractéristiques *f* (augmentation de la variété dans le stock primaire) et *g* (stabilisation de la composition

des QM internes) conduisent naturellement à l'augmentation de la variété et du volume des stocks secondaires, qui doivent être contraints.

- Caractéristique *i*) Une couche marchande peut être produite suivant deux gammes différentes : gamme 1 correspondant à un *blending* à sec, la QM étant expédiée et vendue en l'état ; gamme 2 correspondant à un *blending* à sec, suivi d'un traitement en laverie sous forme d'une à trois opérations additionnelles (lavage, lavage + flottation et lavage + flottation + broyage). Les nomenclatures et temps de traitement varient selon la gamme sélectionnée.
- Caractéristique *j*) L'ordonnancement du *blending* des QM et le choix de gammes sont supposés connus et respecter les capacités datées disponibles.

La solution utilisée il y a quelques mois encore, prenant en compte les caractéristiques précédentes, consistait à choisir une nomenclature de fabrication des QS (blend) dans une liste prédéfinie de blends. Cela avait comme conséquence de chercher à utiliser des QS non disponibles conduisant à des changements de dernière minute des programmes d'extraction, quitte à accroître le stock de tout-venant (caractéristique *e*) au prix de coûts additionnels.

- Caractéristique *k*) La programmation des OF de *blending* est à flux tirés : la demande de QM internes est tirée par celle de la production d'acide, elle-même tirée par un programme de chargement de bateaux. En moyenne, 30 à 50 bateaux transportant 16.000T à 24.000T d'acide chacun sont exportés annuellement. Cette quantité correspond à 5 à 9 jours de production de QM. Les autres QM sont également tirées par une programmation d'expéditions de minerais par bateau de 20.000T ou 50.000T, correspondant à 3 à 8 jours de production de QM. On observe quelques fois une anticipation d'une semaine d'un enlèvement programmé ou une décision de satisfaire une commande sur le marché spot, correspondant à un enlèvement d'acide ou de minerais équivalent à une quantité de *blending* à sec variable selon la gamme (voir §4.2). Ces modifications ne sont connues qu'au dernier moment et doivent ainsi être gérées en univers incertain (non probabilisable). Le risque de ne pas faire face à ce type d'imprévu est partiellement pris en compte par le *blending* dynamique que nous allons présenter mais aussi par l'utilisation de stocks de sécurité. Ces stocks seront dimensionnés en univers incertain pour les inputs au niveau du stock secondaire.

Pour répondre à ce problème complexe défini par les caractéristiques *a* à *k*, nous proposons : *i*) un modèle d'optimisation dynamique qui définit conjointement l'approvisionnement du stock secondaire par le stock primaire et les *blends* optimaux des commandes de QM à satisfaire ; *ii*) une approche de réduction du risque de ne pas pouvoir faire face à un changement imprévu de QS à produire au cours de la semaine à venir, obtenue par l'usage du *blending* dynamique et de stocks de sécurité définis en univers incertain, désignés sous le terme « Stocks de Flexi-Sécurité », pour le distinguer des stocks de sécurité définis en univers aléatoire.

En Section 2, nous présentons notre analyse de la littérature. Notre approche proposée de modèle de *blending* dynamique et de gestion de risque est décrite en Section 3. La section 4 illustre la flexibilité offerte par le modèle de *blending* dynamique et l'amélioration du contrôle du risque en combinant *blending* dynamique et stocks flexi-sécurité. Nous terminons par une brève conclusion (Section 5).

2 REVUE DE LITTÉRATURE

On présente ici une revue de littérature concise sur le problème de *blending* ainsi qu'une synthèse des travaux de recherche pertinents sur le dimensionnement des stocks de sécurité en univers incertain.

2.1 Articles traitant du problème de *blending*

La première étude traitant le problème de *blending* est celle de Stigler sur l'adéquation des régimes alimentaires aux niveaux de revenus (1939). En 1947, Dantzig trouve une solution numérique à ce problème de programmation linéaire (PL) avec son algorithme du simplexe. Depuis les années 60, plusieurs auteurs développent des modèles de PL pour aborder le problème de *blending* dans différentes industries, notamment dans l'agroalimentaire, les industries chimiques et pétrolières, les cimenteries et minoteries et, enfin, l'industrie minière. L'analyse des travaux retenus a montré que le problème de *blending* qualifié par les 11 caractéristiques décrites dans l'introduction n'était pas encore traité. Les critères d'analyse retenus se fondent sur ces caractéristiques, que nous avons regroupées sous trois thèmes.

- Approvisionnement en inputs. Deux types sont distingués ici : *i*) approvisionnement séquentiel moyennant un seul convoyeur par exemple ; c'est le cas du mélange de céréales en vrac traité par [Bilgen et Ozkarahan, 2007], du mélange semi-continu de matériaux [Goldsmith, 1966] et du mélange de matières premières en minoterie étudié par [Kural et Özsoy, 2004]. ; *ii*) approvisionnement parallèle qui est utilisé pour le mélange de fertilisants [Ashayeri *et al.*, 1994], de pétroles bruts [Bengtsson *et al.*, 2013], [Oddsottir *et al.*, 2013], de saucisses [Steuer, 1984], de charbon à coke [William et Haley, 1959] et de minerais [Zhang *et al.* 2011].

- Contexte productif. Celui-ci définit si le *blending* est réalisé dans une logique de : *i*) flux tiré, le mélange s'effectuant pour répondre à un besoin spécifique exprimé par un client interne ou externe (production à la demande). ; ce cas est illustré par [Bengtsson *et al.*, 2013], [Bilgen et Ozkarahan, 2007], [Chanda et Dagdelen, 1995], [Karmarkar et Rajaram, 2001], [Stokes et Tozer, 2006], [Williams et Haley, 1959] et [Zhang *et al.*, 2011] ; *ii*) flux poussé produisant pour stock en attente d'une demande à venir, comme c'est le cas de [Ashayeri *et al.*, 1994] et [Kural et Özsoy, 2004].

- Critère d'optimisation. La plupart des papiers se sont basés sur un seul critère économique, notamment : *i*) la minimisation du coût, qu'il soit de [Ashayeri *et al.*, 1994], [Cain et Price, 1986], [Kumral, 2003], [Yoon *et al.*, 1997] et [Zhang *et al.*, 2011], ou de transport [Bilgen et Ozkarahan, 2007] ; *ii*) la maximisation du profit comme c'est le cas de [Bengtsson *et al.*, 2013] et [Oddsottir *et al.*, 2013] ; *iii*) le critère de qualité du mélange, citons par exemple de [Montante *et al.*, 2016] et [Jonuzaj et Adjiman, 2017]. Alors que d'autres chercheurs ont combiné plusieurs critères : *a*) de coût et de qualité comme dans [Karmarkar et Rajaram, 2001] ; ou encore *b*) de coût, qualité et profit qu'on retrouve dans le travail de [Steuer, 1984]. Par ailleurs, le critère étudié dans cet article, visant à minimiser des pénalités générées par la déviance de valeurs cibles, a été traité dans les travaux de [Chanda et Dagdelen, 1995], [Goldsmith, 1966] et [Kural et Özsoy, 2004].

En se basant sur l'analyse de ces articles, nous pouvons confirmer que ce travail traite un problème spécifique de *blending*, combinant plusieurs caractéristiques qui ne sont pas prises en compte dans la littérature : *i*) les inputs extraits en amont de la CL intégrée possèdent des compositions chimiques variables dans le

temps (caractéristique *f*) ; *ii*) la disponibilité des inputs varie dans le temps selon l'accessibilité aux couches (caractéristiques *a* et *d*) ; *iii*) l'approvisionnement séquentiel du stock d'inputs avec une capacité de stockage et de transport limitée (caractéristiques *b* et *c*) ; *iv*) les outputs peuvent être fabriqués suivant des gammes différentes modifiant éventuellement la composition chimique des inputs (caractéristique *i*). Ces contraintes doivent être prises en compte pour répondre à la demande en termes de quantité et qualité. De plus, le travail présent aborde le problème de stabilisation de la composition chimique des lots envoyés à l'atelier d'acide phosphorique (caractéristique *g*). Ainsi, la variabilité et l'incertitude des caractéristiques du système déterminent la nature spécifique du problème étudié.

2.2 Gestion de l'incertitude

La conception moderne de l'incertitude a été introduite au début des années vingt par les économistes [Knight, 1921] et [Keynes, 1936]. Plusieurs communautés de recherche (économistes, décideurs, analystes de risque, scientifiques comportementaux) ont proposé différentes taxonomies de l'incertitude [Naji, 2016] qui se recouvrent en grande partie [Smithson, 1989], [Klir et Wierman, 1999], [Oberkampf *et al.*, 2004], [Ayyub et Klir, 2006], et [Wierman, 2010]. On en dégage trois axes d'analyse :

- L'incertitude aléatoire, définie comme la variation inhérente associée au système ou environnement physique [Oberkampf *et al.*, 2004], dont certains paramètres peuvent être décrits par des distributions de probabilité [Walker *et al.*, 2003]. Dans ce contexte, la RO a proposé un grand nombre de modèles stochastiques du fonctionnement de certains systèmes (approvisionnement, par exemple) qui fournissent des solutions analytiques de leurs variables de commande optimisant un critère défini en espérance mathématique. Dans certains cas complexes, cette approche n'est pas possible et la modélisation s'effectue sur un tableur dans lequel on remplace des valeurs de paramètres par l'occurrence d'une variable aléatoire ; l'utilisation de la méthode de Monte Carlo permet d'obtenir des distributions de probabilité empiriques de certains indicateurs, ce qui oriente la détermination des variables de commande qui agissent sur le fonctionnement du système étudié ;

- L'ambiguïté, qui concerne la multiplicité d'alternatives sans préférence pour aucune d'entre elles [Wierman, 2010], ni possibilité de décrire leur distribution de probabilité [Walker *et al.*, 2003]. [Rockafellar et Wets, 1991] ont considéré le modèle de scénario comme une approche commune pour modéliser l'incertitude en pratique. [Kouvelis et Yu, 1997] affirment que le modèle de scénario est l'un des outils importants dans la structuration de l'incertitude des données, lorsque de nombreuses alternatives futures sont potentiellement réalisables sans aucunes probabilités liées.

- Le flou, qui concerne une information imprécise ou indistincte [Oberkampf *et al.*, 2004], et décrit l'incapacité à développer une représentation de scénarios [Walker *et al.*, 2003]. La représentation par intervalle est aussi un modèle pratique qui est largement utilisé ([Ben-Tal et Nemirovski, 2000] et [Lin *et al.*, 2004]). Ce modèle est utile lorsque seules les bandes supérieures et inférieures peuvent être déterminées avec certitude et le décideur ne peut choisir des scénarios spécifiques. Un autre type de modèles pratiques pour modéliser l'incertitude est la représentation basée sur les ensembles polyédriques. La géométrie des ensembles

convexes conduit à différents ensembles d'incertitude, comme l'ensemble d'intervalles, l'ensemble ellipsoïdal ou l'ensemble polyédrique [Ben-Tal *et al.*, 2009].

L'incertitude abordée dans ce papier concerne l'occurrence possible d'une commande imprévue (changement dans la demande), qui ne peut être probabilisée, mais un certain nombre de scénarios sont considérés comme possibles sans pouvoir connaître leurs probabilités d'occurrence. Cette incertitude s'inscrit clairement dans l'axe de l'ambiguïté.

Pour terminer, on peut rappeler que pour répondre à l'incertitude, trois approches complémentaires peuvent être mobilisées [Bamoumen *et al.*, 2018] : *i*) améliorer la qualité des informations factuelles et procédurales utilisées dans la prise de décision ; *ii*) surdimensionner les ressources productives pour améliorer la réactivité et la flexibilité du système ; *iii*) créer des stocks de produits finis ou intermédiaires le long de la chaîne. L'approche proposée dans ce papier combine deux types de ces moyens de gestion de risque, à savoir le *blending* dynamique qui relève de l'amélioration d'une procédure et les stocks de sécurité portant sur des produits intermédiaires plutôt que finis, pour des raisons d'efficacité. Ces niveaux de stock sont à définir en milieu incertain. Or, l'incertitude telle définie dans notre cas, ne permet pas de dimensionner les stocks de sécurité de manière analytique (solution classique dans le cadre d'une incertitude aléatoire) mais de manière spécifique (cf. §4.2). Pour éviter toute ambiguïté, nous proposons d'utiliser dans c le terme « stock de flexi-sécurité » pour le désigner.

3 FORMULATION DU PROBLEME DE BLENDING DYNAMIQUE AVEC DES GAMMES ALTERNATIVES

Plusieurs unités de *blending* en parallèle peuvent produire un ensemble de J outputs ($j=1..J$) en mélangeant des inputs à partir d'un ensemble de I inputs ($i=1..I$). Les inputs et les outputs sont caractérisés par C composants ($c=1..C$). La composition de l'input i en composant c , α_{ci} , est connue et définie comme étant le pourcentage du poids du composant c dans le poids total de l'input i . La composition β_{cj} de l'output j , est définie comme étant le pourcentage du poids du composant c dans le poids total de l'output j après le mélange ; elle doit être conforme à une charte qualité ($\beta_{cj}^{\text{Min}} \leq \beta_{cj} \leq \beta_{cj}^{\text{Max}}$), illustrée par le Tableau 1.

Nous traitons le problème dynamique de production de K commandes ($k=1..K$) sur un horizon de planification T divisé en périodes égales ($t=1..T$). L'ordonnement de production des commandes est supposé préétabli et compatible avec la disponibilité des processeurs de *blending*. Cela conduit à ignorer les processeurs dans notre formulation.

Selon la caractéristique i , la production des outputs peut être effectuée en utilisant une gamme parmi H gammes alternatives ($h=1..H$). La première ($h=1$) est liée au *blending* à sec et est utilisée pour certaines QM directement exportées. Les autres gammes sont effectuées dans une installation de lavage et peuvent, ou non, suivre la première gamme à sec en fonction de la configuration de l'installation. Les gammes $h=1$ (*blending* à sec) et $h=2$ (*blending* à sec + lavage dans une laverie) sont utilisées dans l'axe centre.

Lors de l'utilisation des gammes $h>1$, le poids de l'input i après le lavage est multiplié par le taux de réduction $\eta_{ih} < 1$, en raison du processus de concentration dans l'installation de lavage. Pour conserver une formulation générale, on fixe, pour $h=1$, $\eta_{i1} = 1$ (processus de *blending* à sec). Par ailleurs, la proportion initiale α_{ci} de composant c dans l'input i n'est pas conservée mais elle est multipliée par le facteur γ_{cih} qui peut être supérieur ou inférieur à 1. Là encore, pour conserver une formulation générale, on définit $\gamma_{ci1} = 1, \forall i, c$.

Dans notre définition du problème, la gamme μ_k utilisée par la commande k est déjà définie (caractéristique j). La commande k porte sur le seul output $j=\lambda_k$, pour une demande D_k dont le poids est défini après le dernier traitement de la gamme μ_k . Les variables de décision x_{ik} définissent la quantité d'input i utilisée pour produire la commande k et ne dépendent pas de la gamme μ_k . La relation (1) lie le poids des inputs utilisés pour produire le poids requis de l'output.

$$\sum_i x_{i\lambda_k} \cdot \eta_{i\mu_k} = D_k, \forall k \quad (1)$$

Cela implique, si $h>1$, que la quantité totale d'inputs utilisés pour produire l'output j est supérieure à D_j , mais qu'elle dépend également de la structure des inputs utilisés, c'est-à-dire du mélange choisi. Avec la gamme μ_k utilisée par la commande k , le poids du composant c provenant de l'input i dans le poids total D_k est $x_{ij} \cdot \alpha_{ci} \cdot \eta_{i\mu_k} \cdot \gamma_{ci\mu_k}$, qui devient $x_{ij} \cdot \omega_{ci\mu_k}$, en posant $\omega_{ci\mu_k} = \alpha_{ci} \cdot \eta_{i\mu_k} \cdot \gamma_{ci\mu_k}$. Nous supposons que les bornes de la plage de pourcentage en poids du composant c pour l'output j (β_{cj}^{Min} et β_{cj}^{Max}) ne dépendent pas de la gamme utilisée. La transcription de la charte de qualité en se référant à la commande k concernant l'output $j=\lambda_k$, conduit à remplacer la structure d'output β_{cj} par $\beta_{c\lambda_k} = \sum_c \omega_{ci\mu_k} \cdot (x_{ik} / D_k)$. Ainsi, la charte de qualité peut être décrite par la relation (2) (rappelons que pour $h=1$ $\omega_{ci1} = \alpha_{ci}, \forall i, c$).

$$\beta_{c\lambda_k}^{\text{Min}} \cdot D_k \leq \sum_i \sum_i \omega_{ci\mu_k} \cdot x_{ik} \leq \beta_{c\lambda_k}^{\text{Max}} \cdot D_k, \forall c, \forall k \quad (2)$$

Il est intéressant de noter que, si la gamme $h>1$ est utilisée, il n'est pas possible de déduire de $[\beta_{cj}^{\text{Min}}, \beta_{cj}^{\text{Max}}]$, les contraintes de plages de composant d'un output j avant son admission dans une installation de lavage, car ces bornes doivent être indépendantes de la solution de *blending*, ce qui n'est pas possible parce que la composition et le poids total des inputs utilisés par la gamme h proviennent de la solution de *blending* utilisée pour cet output.

La commande k est traitée pendant les périodes t tel que $\delta_{kt} = 1$ (sinon, ce booléen est égal à 0) ; le temps de production est noté v_k ($\sum_t \delta_{kt} = v_k$). En raison de contraintes liées à l'alimentation du stock secondaire, un même input i ne peut pas être transporté, pendant la période t , par plus d'un convoyeur, ces convoyeurs ayant le même débit de transfert ρ . On suppose que la

consommation de tous les inputs utilisés pour produire une commande k donnée est linéaire sur son temps de production (sinon, il serait nécessaire d'introduire des coefficients datés, ce qui n'augmenterait pas la taille du problème). La consommation d'input i par la commande k pendant la période t est alors égale à x_{ik} / v_k , si $\delta_{kt} = 1$, et 0 sinon.

Un problème se pose dans le cas de la gamme 2 (mélange à sec + lavage dans une laverie) : la quantité totale d'inputs à traiter dans l'unité de *blending* et donc le temps de production dépendent de la solution de *blending*. Le temps de production $v_k = \sum_t \delta_{kt}$ signifie que le débit de production est de D_k / v_k . Si v_k n'est pas un paramètre, la relation (3) ne peut être linéaire. Notre formulation permet de contourner ce problème, car le taux de production peut varier de manière importante autour de sa valeur nominale. Ainsi, il suffit de définir v_k comme valeur «moyenne» du temps de production et d'en déduire l'ordonnement des commandes, la valeur de δ_{kt} , à utiliser comme paramètres de notre problème. On peut ajouter que si un ajustement par une modification du débit de production ne peut pas être entièrement effectué, il est toujours possible, en plus, d'ajuster l'ordonnement des OF pour éviter tout chevauchement ou tout arrêt de la production.

La production conduit à prélever des inputs dans le stock secondaire de la zone de *blending*, ayant un niveau initial S_{i0} , complétée par les alimentations provenant des stocks primaires, acheminées par des convoyeurs (voir Figure 2). Nous définissons la variable de décision binaire $y_{it} = 1$ si l'alimentation de l'input i dans le stock secondaire de la zone de *blending*, à partir du stock primaire, a eu lieu pendant la période t (et 0, sinon). Comme un input donné i ne peut pas être transporté par plus d'un convoyeur, la quantité d'input i à acheminer vers la zone de *blending* est de $\rho \cdot y_{it}$ pendant la période t . Le stock d'input i à la fin de la période t , noté S_{it} ($S_{it} \geq 0$), dépend donc du stock initial S_{i0} , augmenté d'approvisionnements $\rho \cdot y_{it'}$ au cours des périodes $t' \leq t$ et diminué de la consommation de cet input au cours des périodes $t' \leq t$. La relation (3) reflète la contrainte de conservation des flux ; elle est complétée par la relation (4) qui évite toute demande différée.

$$S_{i,t} = S_{i,t-1} + \rho \cdot y_{it} - \sum_{k|\delta_{kt}=1} x_{ik} / v_k, \forall i, \forall t > 1 \quad (3)$$

$$S_{it} \geq 0, \forall i, \forall t \quad (4)$$

Les décisions prises en amont de la chaîne d'extraction définissent les approvisionnements possibles en inputs et les prélèvements des stocks primaires vers les stocks secondaires. Comme ces informations sont connues par le programme prévisionnel d'extraction quotidienne des outputs, nous sommes en mesure de définir la disponibilité cumulée libre B_{i0}^f (*caractéristique a*) de l'input i à la fin de la période t dans le stock primaire, sans tenir compte des prélèvements de l'input i dans ce stock. L'existence de la variable de décision y_{it} est soumise à la disponibilité cumulée libre B_{it}^f ($B_{it}^f = 0 \rightarrow y_{it} = 0$). Le processus de prélèvement des inputs des stocks primaires vers les stocks

secondaires est limité par le nombre R_t de convoyeurs disponibles pendant la période t (relation 5 et *caractéristique c*) et par une accumulation du disponible suffisante (relation 6).

$$\sum_i B_{it}^f > 0 \cdot y_{it} \leq R_t, \forall t \quad (5)$$

$$B_{it}^f \geq \rho \cdot \sum_{t' \leq t} y_{it'}, \forall i, \forall t \quad (6)$$

Il faut considérer que, tant que le minerai extrait n'est pas encore transporté, il n'est pas possible d'accéder aux couches inférieures où le minerai extrait est conservé. Ainsi, le programme d'extraction tactique implique qu'à un moment t donné, une partie de l'input disponible i doit être enlevée. Cette contrainte peut être considérée comme une disponibilité cumulée B_{it}^c à respecter (*caractéristique d*) obligeant à prélèvement minimal de l'input i . D'où la relation (7).

$$B_{it}^f - \rho \cdot \sum_{t' \leq t} y_{it'} \leq B_{it}^c, \forall i, \forall t \quad (7)$$

Pour stabiliser la composition de lots successifs d'une QM utilisée pour la fabrication d'acide phosphorique (sous-ensemble \mathcal{E} de l'ensemble des outputs), il est préférable que la composition de cet output j soit aussi proche que possible des spécifications d'une valeur-cible τ_{cj} (*caractéristique g*). Cette valeur-cible (%) du composant c dans l'output j ne dépend pas de la gamme choisie mais elle tient compte du taux de réduction impliqué par l'utilisation de la gamme μ_k , quand $\mu_k > 1$. Ainsi, les relations (8) permettent de déterminer, pour la commande k tel que $\lambda_k \in \mathcal{E}$, l'écart absolu entre le poids de commande du composant c de l'output λ_k , c'est-à-dire $\sum_i \alpha_{ci} \cdot x_{ik} \cdot \eta_{i\mu_k}$, et sa composition cible ($\tau_{c\lambda_k} \cdot D_k$). Un coût de déviance σ_c est attribué à Δ_{ck} .

$$\Delta_{ck} \geq \sum_i \alpha_{ci} \cdot x_{ik} \cdot \eta_{i\mu_k} - \tau_{c\lambda_k} \cdot D_k \quad \forall c, \forall k | \lambda_k \in \mathcal{E} \quad (8)$$

$$\Delta_{ck} \geq \tau_{c\lambda_k} \cdot D_k - \sum_i \alpha_{ci} \cdot x_{ik} \cdot \eta_{i\mu_k}$$

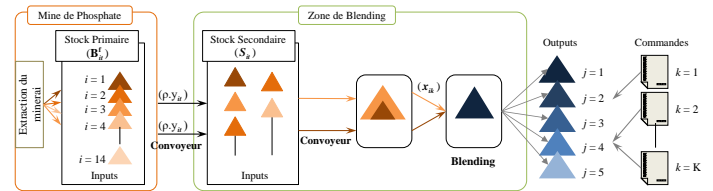


Figure 2. Processus de blending (blending à sec, avant la laverie)

Les autres caractéristiques de notre modèle prennent en compte des contraintes liées au stock.

- Nous souhaitons disposer du stock de sécurité S_i^{Min} pour faire face à une demande imprévue, ce qu'il est possible d'obtenir par la contrainte $S_{it} - S_i^{\text{Min}} \geq 0, \forall i, t$, mais celle-ci peut empêcher de trouver une solution réalisable. C'est pourquoi, il est préférable d'utiliser la relation (9), où w_{it} exprime l'écart pour atteindre le stock de sécurité, et combiner avec la pénalité θ_i introduite dans la fonction objectif.

$$\begin{aligned} w_{it} &\geq 0, \forall i, t \\ w_{it} &\geq S_i^{\text{Min}} - S_{it}, \forall i, t \end{aligned} \quad (9)$$

- Le stockage intermédiaire d'input i a lieu chaque fois que le stock i dans la zone de *blending* dépasse le seuil S_i^{Max} (*caractéristiques b et e*), entraînant un coût supplémentaire significatif pour le minerai à transférer ultérieurement du stockage intermédiaire au stock secondaire dans la zone de *blending*. La variable z_{it} , éventuellement nulle, détermine ce surplus (*caractéristique h*) par la relation (10). On y associe le coût κ ; de stockage dans le stock de tout-venant, proportionnel à la fois à la durée de stockage et aux quantités stockées. Le système utilisé pour calculer le coût du stockage intermédiaire est sans importance si le stockage intermédiaire est évité (le coût partiel correspondant dans la fonction objectif étant nul) ; on utilise donc un coût fictif κ élevé permettant d'éliminer les solutions menant au stockage intermédiaire.

$$\begin{aligned} z_{it} &> 0, \forall i, t \\ z_{it} &> S_{it} - S_i^{\text{Max}} \end{aligned} \quad (10)$$

- L'utilisation du modèle conduit naturellement à des solutions avec des alimentations importantes en inputs à partir du stock primaire, afin d'améliorer la valeur de la fonction objectif. Il faut donc introduire une contrainte sur le stockage global qui ne peut pas dépasser S^{Max} (*caractéristique h*), avec la relation (11).

$$\sum_i S_{it} < S^{\text{Max}}, \forall t \quad (11)$$

- L'ensemble des inputs varie au cours du temps, en raison de la modification de leurs compositions, attestée par les échantillons supplémentaires prélevés sur les zones dont l'extraction est imminente (*caractéristique f*). Cela augmente potentiellement la variété des inputs à stocker dans le stock secondaire et peut empêcher une séparation appropriée des stocks d'inputs dans la zone de *blending*, qui a une capacité limitée. Pour éviter cette dérive, il est nécessaire de limiter le nombre d'inputs différents présents dans le stock secondaire à K^{Max} à la fin de l'horizon de planification. Ceci nous amène à introduire la variable binaire u_i égale à 1 si $S_{iT} > 0$, et nulle sinon. La relation (12), où M est un nombre très élevé, impose la limitation des différents inputs présents à la fin de la période T.

$$\begin{aligned} S_{iT} &< M \cdot u_i, \forall i \\ \sum_i u_i &\leq K^{\text{Max}} \end{aligned} \quad (12)$$

La fonction-objectif de ce problème linéaire mixte est donnée par la relation (13).

$$\text{Min} \left(\sum_i \theta_i \cdot w_{it} + \kappa \cdot \sum_t \sum_i z_{it} + \sum_{k| \lambda_k \in \mathcal{E}} \sum_c \sigma_c \cdot \Delta_{ck} \right) \quad (13)$$

4 ILLUSTRATION DE LA FLEXIBILITE DU BLENDING DYNAMIQUE AVEC GAMMES ALTERNATIVES ET STOCKS DE FLEXI-SECURITE

Les données utilisées sont celles de l'unité de *blending* de Ben Guerir (axe centre de l'OCP). Le processus de *blending* prend en compte 5 composants pour caractériser 14 inputs (QS) et 5 outputs

(QM), dont les deux premiers sont internes. Nous ne gardons ici que 3 outputs pour limiter la taille des tableaux d'exemple. Nous avons indiqué que les caractéristiques de ces inputs peuvent varier légèrement en fonction de l'emplacement de l'extraction, et donc dans le temps. Les valeurs sélectionnées pour cette étude de cas sont données dans le tableau 1. Il fournit également le taux de réduction de l'input i après son passage dans la laverie (gamme $h=2$) et, directement, le coefficient ω_{ci2} à utiliser pour cette gamme. Le taux de distorsion γ_{ci2} n'est pas donné mais est facilement calculable, puisque $\omega_{ci2} = \alpha_{ci} \cdot \eta_{i2} \cdot \gamma_{ci2}$.

Tableau 1. Composition α_{ci} des inputs et spécifications β_{cj} de la composition de certains produits

Structure α_{ci} (%) du composant c (<5) dans le poids de l'input i c=5 → unité: ppm															
		Input i													
		i=1	i=2	i=3	i=4	i=5	i=6	i=7	i=8	i=9	i=10	i=11	i=12	i=13	i=14
		C3 sup	SA2	C3G	C1	CO	C4	C5	C2 sup	SB	SX	C3 inf	C1 Exp	C2 Exp	C6
Composant c	c=1 BP1	50,01	55,87	56,95	59,50	59,50	61,00	59,00	60,00	61,50	63,00	64,00	65,50	65,50	65,72
	c=2 CO1	3,70	7,74	5,36	4,50	5,20	4,83	7,72	5,08	5,24	5,50	4,95	5,90	4,61	4,95
	c=3 MeO	0,99	0,65	0,94	1,15	1,20	1,49	1,70	0,91	0,80	0,80	1,12	0,80	0,65	1,23
	c=4 SiO ₂	24,00	8,00	17,19	9,50	8,50	11,74	9,79	11,50	8,00	11,00	10,00	7,50	8,00	6,00
	c=5 Cd/B	7,00	16,00	6,00	11,00	8,00	10,00	14,00	12,00	10,00	10,00	5,00	12,00	13,00	9,00

Contraintes de structure β_{cj} (%) en composant c dans le poids de l'output j				
		Output j		
		j=1 (h=2) Tess	j=2 (h=2) Stand	j=3 (h=1) MT
Composant c	c=1	65,12 < β 112 < 66,80	65,12 < β 112 < 66,80	64,00 < β 131 < 67,00
	c=2	5,00 < β 212 < 6,50	5,00 < β 212 < 6,50	5,00 < β 231 < 7,00
	c=3	β 312 < 0,75	β 312 < 0,75	β 331 < 1,00
	c=4	5,50 < β 412 < 8,50	5,50 < β 412 < 8,50	β 431 < 8,00
	c=5	β 521 < 6,50	β 521 < 8,00	β 531 < 12,00

Taux de réduction η_{i2} pour le blending à sec et pour le lavage														
	0,88	0,84	0,85	0,87	0,90	0,81	0,74	0,87	0,83	0,77	0,92	0,95	0,90	0,89

Coefficient ω_{ci2} du composant c dans l'input i avec la gamme h=2															
Composant c	c=1	47,84	51,90	52,23	57,25	59,23	54,55	48,46	53,77	56,51	53,70	64,83	72,80	65,55	65,33
	c=2	2,80	5,85	4,60	3,56	4,35	3,64	3,37	4,37	3,17	3,09	4,74	5,16	4,11	4,23
	c=3	0,64	0,46	0,56	0,82	0,88	0,69	0,62	0,61	0,50	0,46	0,88	0,47	0,48	0,70
	c=4	18,48	5,62	11,25	8,17	7,56	8,91	5,49	8,68	5,99	0,00	8,05	6,01	6,07	4,23
	c=5	5,77	8,71	4,11	6,82	5,13	4,50	4,57	9,01	7,67	7,11	4,31	9,77	10,10	6,67

Nous étudions¹ la flexibilité du *blending*, d'abord dans un contexte mono-période statique (§4.1), puis dans un contexte dynamique avant d'illustrer la prise en compte du risque basée sur les principes de la flexi-sécurité (§4.2).

4.1 Flexibilité du blending dans le contexte statique

Dans ce contexte, la formulation du modèle précédent de la section 3 doit être adaptée car le problème de *blending* est défini pour une période unique au cours de laquelle soit une commande unique doit être produite dans une installation unique de *blending* (§4.1.1), soit K commandes de K différents outputs doivent être produits dans K processeurs parallèles de *blending* (§4.1.2). Dans ce contexte, x_{ik} peuvent être remplacés par x_{ij} et λ_k disparaît ; la relation (1) devient $\sum_i x_{ij} \cdot \eta_{i\mu_j} = D_j, \forall j$ et la relation (2) devient $\beta_{cj}^{\text{Min}} \cdot D_j \leq \sum_i \omega_{ci\mu_j} \cdot x_{ij} \leq \beta_{cj}^{\text{Max}} \cdot D_j, \forall c, \forall j$. La référence au temps disparaît, ce qui entraîne la suppression des variables y_{it} , w_{it} et z_{it} et celle des relations (4, 5, 6, 7, 9, 10, 11 et 12) ; le stock secondaire n'est plus alimenté à partir du stock primaire et le mélange est effectué en utilisant le stock secondaire

¹ Tous les exemples de cette section 4 ont été résolus en utilisant le logiciel développé pour l'OCP qui l'utilise maintenant dans l'axe centre. Il encapsule le modèle générique paramétré (décrit dans la section 3) formulé avec le langage de modélisation algébrique AML Xpress-IVE

de FICO, associé à une interface pour la saisie de données d'un problème, alimentant une base de données relationnelle et permettant de résoudre l'instanciation d'un problème d'optimisation.

initial S_i et la contrainte 3 devient $S_i \geq \sum_i x_{ij}, \forall i$. Pour cette étude de cas, nous simplifions la fonction-objectif car sa définition ne modifie pas la flexibilité analysée ici.

4.1.1 Production unique traitée durant une période unique

Nous cherchons ici à déterminer, successivement et indépendamment, le mélange optimal pour l'output j , permettant de satisfaire la demande $D_j = 100$, définie après la laverie pour $j=1$ et $j=2$ (gamme $h=2$) et, pour $j=3$, après *blending* à sec (gamme $h=1$). Enfin, nous utilisons la fonction-objectif de minimisation de la consommation du composant $c=1$ dans la production de D_j ($\text{Min}(\sum_i x_{ij} \cdot c_i)$). D'autres fonctions-objectifs pourraient également être choisies pour illustrer la flexibilité du mélange, avec les mêmes conclusions. À partir des données des Tableaux 1 et 2, on peut vérifier, pour $j=2$ qu'après réduction réalisée par le traitement sur inputs (η_{i2}) dans la laverie permet de retrouver $D_2 = 100$ ($25,40 \times 84\% + 92,98 \times 74\% + 12,8 \times 77\% = 100$) et de respecter les bornes de la charte client. La composition de l'output, tout en respectant la charte qualité, dépend donc de celle des inputs et du *blend* retenu $\sum_i \eta_{i2} \cdot (x_{ij} / D_j)$.

Tableau 2. Solution optimale pour les outputs 1 à 3

x_{ij}	Input i								$\sum_i x_{ij}$
	$i=1$	$i=2$	$i=3$	$i=7$	$i=10$	$i=12$	$i=13$	$i=14$	
Output $j=1$	-	8,84	27,62	76,86	-	6,31	-	7,00	126,63
$j=2$	-	25,40	-	92,98	12,80	-	-	-	131,18
$j=3$	7,02	5,52	-	-	-	7,47	25,69	54,30	100,00
Σ	7,02	39,76	27,62	169,84	12,80	13,78	25,69	61,30	357,81
$x_{ij} / \sum_i x_{ij}$									
$j=1$	-	0,07	0,22	0,61	-	0,05	-	0,06	1,00
$j=2$	-	0,19	-	0,71	0,10	-	-	-	1,00

$j=2$ ($h=2$) Tess	Composant c				
	$c=1$	$c=2$	$c=3$	$c=4$	$c=5$
Charte client	65,12 < β 112 < 66,80	5,00 < β 212 < 6,50	β 312 < 0,75	5,50 < β 412 < 8,50	β 521 < 8,00
Solution obtenue	β 112 = 65,12	β 212 = 5,02	β 312 = 0,75	β 412 = 7,51	β 521 = 7,37

Ensuite, pour illustrer la diversité des solutions possibles, nous avons forcé le problème à utiliser un nombre N d'inputs (ce paramètre N prenant successivement toutes les valeurs possibles), en imposant de conserver une quantité minimale des inputs dans le mélange ($x_{ij} > \varepsilon \cdot D_j$). Les mélanges trouvés pour différentes valeurs de N et $\varepsilon = 5\%$ sont donnés dans le Tableau 3. Il est évident que si le mélange optimal de l'output j utilise N_j^* inputs, avec $x_{ij} > \varepsilon \cdot D_j$, on trouve la solution sans contrainte (mise en gras dans ce tableau) et que l'optimum se dégrade davantage quand on s'éloigne de N_j^* . On peut alors remarquer que, quand $N > N_j^*$, $H \cdot H_j^*$ inputs prennent la valeur $x_{ij} = \varepsilon \cdot D_j$, afin de limiter la dégradation de la fonction objectif. Ce paramètre ε , qui doit être tel que $\varepsilon \leq 1/N$, peut empêcher l'utilisation de tous les inputs s'il est relativement important mais, s'il est relativement faible, par exemple $\varepsilon = 1\%$, nous pouvons trouver une solution utilisant tous les intrants (par exemple, pour $\varepsilon = 1\%$ et $j=1$ nous pouvons

le produire avec $N = 13$ avec 6, 35, 41, 2 et 30 respectivement pour, $i = 2, 3, 7, 11$ et 14 et 1 pour les 8 autres inputs).

Tableau 3. Mélanges possibles de certains outputs, selon un nombre prédéterminé H d'inputs à utiliser

j	1							2															
	$i=2$	$i=3$	$i=5$	$i=7$	$i=9$	$i=11$	$i=12$	$i=14$	$i=1$	$i=2$	$i=3$	$i=4$	$i=5$	$i=6$	$i=7$	$i=8$	$i=9$	$i=10$	$i=11$	$i=12$	$i=13$	$i=14$	
2	Impossible							-	69	-	-	-	-	-	-	-	-	-	45	-	-	-	
3	Impossible							-	25	-	-	-	-	93	-	-	-	13	-	-	-	-	
4	14	31	-	65	-	-	16	-	25	-	-	-	-	91	-	5	10	-	-	-	-	-	
5	9	28	-	77	-	-	6	7	-	26	-	-	-	5	87	-	5	7	-	-	-	-	
6	6	27	-	69	-	5	10	8	-	24	5	-	-	5	79	-	5	11	-	-	-	-	
7	7	29	-	53	5	8	5	15	-	23	5	-	-	5	81	-	5	5	-	-	5	-	
8	5	33	5	38	5	5	5	24	-	21	5	-	-	5	77	5	5	5	-	-	-	5	
9	Impossible							-	23	5	5	-	5	69	5	5	5	-	-	-	-	5	
10	Impossible							5	22	5	-	-	5	64	5	5	5	-	5	-	5	-	5
11	Impossible							5	23	5	5	-	5	57	5	5	5	-	5	-	5	-	5
12	Impossible							5	23	5	5	5	5	51	5	5	5	-	5	-	5	-	5

Ensuite, nous avons cherché, indépendamment pour chaque output, les poids minimum et maximum des différents inputs disponibles, en l'absence de toute restriction sur la disponibilité de ces inputs. Nous avons ensuite utilisé successivement pour chaque couple (i, j) la fonction objectif $\text{Min}(x_{ij} / D_j)$, puis $\text{Max}(x_{ij} / D_j)$, tout en respectant les contraintes de composition de la charte qualité. Les résultats de cette analyse sont présentés dans le Tableau 4.

Tableau 4. % Minimum et maximum d'input i contenu dans chaque output j

$\beta_{ij}^{\text{Min}} - \beta_{ij}^{\text{Max}}$	Input i													
	$i=1$	$i=2$	$i=3$	$i=4$	$i=5$	$i=6$	$i=7$	$i=8$	$i=9$	$i=10$	$i=11$	$i=12$	$i=13$	$i=14$
Output $j=1$	0-3	3-17	27-44	0-6	0-13	0-12	10-77	0-6	0-11	0-7	0-17	0-13	0-7	7-44
$j=2$	0-22	0-69	0-48	0-44	0-54	0-62	0-98	0-47	0-54	0-48	0-54	0-31	0-39	0-62
$j=3$	0-7	0-17	0-12	0-26	0-26	0-18	0-20	0-27	0-40	0-34	0-33	0-100	0-68	0-60
$j=4$	0-17	8-88	0-29	0-54	0-63	0-41	0-33	0-60	0-69	0-59	0-54	0-51	0-47	0-48
$j=5$	0-47	0-100	0-60	0-63	0-63	0-41	0-66	0-49	0-47	0-32	0-30	0-28	0-27	0-29

En l'absence de contraintes sur la disponibilité des inputs, ces extrema restent valables quelle que soit la fonction-objectif choisie. Un minimum positif (chiffres en rouge dans le tableau) implique que l'input correspondant est indispensable à la production de l'output considéré ; par exemple, la production de l'output $j=1$ est impossible si on ne dispose pas des inputs $i=2, 3, 7, 14$ en quantité respectivement égales à 3%, 27%, 10%, 7% du poids de cette production à produire. Cette observation sera utilisée dans la gestion des risques. Par ailleurs, le programme d'extraction de la mine, compte tenu de sa configuration géologique, limite fortement la variété de QS disponibles ; les maxima de ce tableau donnent une indication de l'utilisation possible d'inputs surabondants, qui sont ignorés dans les solutions sans contrainte.

Terminons par une remarque sur la méthode d'extraction du minerai. Dans le tableau 1, les minerais (inputs) sont extraits à l'aide de ce qu'on appelle la «méthode sélective», qui collecte séparément des minerais de qualités différentes de leurs couches. Une autre méthode extraite, appelée «méthode globale» est parfois utilisée. Elle consiste à extraire simultanément deux (ou trois) couches contiguës contenant deux QS différentes (la troisième possible contenant du stérile). Cette méthode, qui réduit le nombre d'inputs, permet d'économiser certains coûts d'extraction, mais elle en génère d'autres car le traitement dans l'atelier de lavage doit éliminer plus de résidus. Cette fusion de QS n'empêche pas d'obtenir une solution, si la variété reste suffisante, elle peut conduire à une perte pour certaines fonctions-objectifs. Par

exemple, si on essaie de minimiser l'écart total (voir relation (8)) par rapport aux composants de l'output 2 ($\text{Min}(\sum_c \sigma_c \cdot \Delta_{c2})$, avec $\sigma_c = 1, \forall c$), utilisés directement pour produire de l'acide phosphorique, la solution optimale pour $D_2 = 100$ (consommer 49,38, 30,57, 4,57, 4,60 et 26,91 pour respectivement $i = 2, 3, 11, 12$, et 14) donne une déviance nulle. Maintenant, si nous fusionnons les inputs en groupements ($\{1,2\}$; $\{3,4,5,7\}$; $\{6,8,9\}$ et $\{10,11,12,13,14\}$) tel que chaque groupement contient les inputs ayant le même poids la nouvelle solution optimale donne une déviance de 1,18724.

4.1.2 Plusieurs productions traitées durant la même période
Enfin, nous avons traité le cas d'une production simultanée des trois outputs ($D_j = 100, \forall j$), par 3 unités de *blending* fonctionnant en parallèle et à partir de stocks d'inputs partagés ($S_{0i} = 100$). Ici, nous ne considérons pas le fait que le temps de production des deux premières commandes (gamme $h = 2$) plus long que celui de la troisième (gamme $h = 1$). La consolidation des solutions indépendantes décrites dans le Tableau 2 montre un besoin de 178 pour l'input 7, contre 100 de disponible. La contrainte de disponibilité des inputs conduit à de nouvelles solutions optimales (Tableau 5), la troisième ligne reprend la quatrième ligne du Tableau 2 correspondant à la solution optimale sans contrainte de disponibilité des inputs (SC) et la dernière ligne donne la solution optimale avec contrainte de disponibilité (CD).

Tableau 5. Facteurs influençant les mélanges (D_k et S_{i0}) dans le problème de "Mono-période / Multi-produits"

i	1														2														3													
	2	3	7	8	9	10	11	12	14	2	7	8	9	10	11	14	1	2	10	12	13	14																				
SC	8,84	27,62	76,86	-	-	-	-	6,31	7,00	25,40	92,98	-	-	12,80	-	-	7,02	5,52	-	7,47	25,69	54,30																				
CD	10,88	50,00	50,00	1,58	11,87	0,06	13,50	-	42,33	16,51	-	28,42	18,13	9,94	38,57	3,61	0,00	2,61	16,67	14,06	16,67	16,95																				

En conclusion, les mélanges d'outputs produits simultanément dépendent de la disponibilité des inputs et des commandes à honorer au cours de la même période. Cette observation reste valable dans le contexte dynamique.

4.2 Flexibilité du Blending avec gamme alternative et stock de sécurité dans le contexte dynamique

4.2.1 Gestion de risque par les stocks de sécurité

Le risque traité ici est celui de ne pas pouvoir faire face à une demande imprévue d'une QM pour un volume correspondant à une semaine de production de *blending* à sec en raison d'une arrivée anticipée d'une semaine d'un bateau programmé ou d'une commande inopinée sur le marché spot d'un petit vraquier de 43,000T de minerai. Garder un stock correspondant pour chacune des QM n'est pas très efficace. Avec la souplesse offerte par le *blending* dynamique on peut espérer faire face à cette demande imprévue à condition de disposer des stocks minimaux des QS à minima positifs dans le tableau 4, correspondant à des stocks de flexi-sécurité utilisables pour n'importe quelle commande imprévue (ce qui implique une mutualisation de ces stocks). On a vu que, pour les gammes $h > 1$, la quantité totale des QS et donc le rendement ($D_j / \sum_j x_{ij}$) utilisé dans le *blending* dépend du *blend* retenu dans l'optimisation. Compte tenu du fait que la variation de ce rendement n'est pas très importante, que le débit de production du *blending* à sec peut être momentanément augmenté par rapport à sa valeur nominale (passant de 40000 à 48000 T/semaine) et, enfin, que l'insertion d'une commande

urgente conduit à un décalage des OF suivant qui peut s'ajuster en fonction de la durée de production, on peut raisonnablement simplifier le problème en retenant un rendement moyen de 0,77 pour la gamme $h = 2$.

Nous passons à l'analyse du tableau 6 des minimas requis pour produire les qualités marchandes demandées, qui montre que l'input 2 est nécessaire pour produire les QM 1 (3% minimum) et 4 (8% minimum). Par conséquent, pour fabriquer 43 000 tonnes (production moyenne hebdomadaire) afin de répondre à une commande imprévue urgente pour toute qualité marchande, nous devons disposer du max des deux minimas soit 3440 tonnes (8% de 43.000) de l'input 2 en stock. Le niveau plafond pour les quantités minimales requises de chaque entrée peut être analysé comme un stock de sécurité dans un environnement incertain. L'absence d'un tel stock de sécurité pour l'input 2 empêche toute production des outputs 1 et 4. Le tableau 9 indique le niveau du stock de sécurité correspondant à chaque QS.

Tableau 6. Stock de sécurité

Minimum requis %	Input i														D _j	γ _j -D _j
	i=1	i=2	i=3	i=4	i=5	i=6	i=7	i=8	i=9	i=10	i=11	i=12	i=13	i=14		
j=1	0	3	27	0	0	0	10	0	0	0	0	0	0	7	35000	43000
j=2	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	35000	43000
j=3	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	43000	43000
j=4	0	8	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	43000	43000
j=5	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	43000	43000
Max _j (Min _i)	0	8	27	0	0	0	10	0	0	0	0	0	0	7		
Stock de sécurité	0	3440	11610	0	0	0	4300	0	0	0	0	0	0	0	3010	

Cette stratégie de risque, conçue pour faire face à une commande urgente et imprévue, repose sur: i) des stocks de sécurité pour les inputs indispensables à la fabrication de certaines qualités marchandes (output) et ii) la flexibilité du *blending* dynamique qui permet d'ajuster la composition de la production en fonction des caractéristiques de la demande, combinée à des inputs immédiatement disponibles en stocks et disponibilité des stocks d'aliments provenant de minerais sources prêts à être retirés de la mine au cours des prochaines semaines (formulation au §3). Pour toutes ces raisons, nous proposons le terme «stocks flexi-sécurité» qui reflète les deux types de couverture de risque dans un environnement incertain. Toutefois, il convient de noter que le risque n'est pas complètement éliminé car il existe toujours un risque que l'on ne puisse pas exécuter une commande en fonction de certains autres inputs qui pourraient ne pas être disponibles en quantité suffisante pour produire un *blend* respectant la charte qualité.

4.2.2 Données du problème

Nous traitons ici un exemple de *blending* dynamique avec gammes alternatives, tiré de données réelles (la maille temporelle utilisée ici est le jour), dans lequel nous déterminons les alimentations en input dans le stock secondaire et les mélanges optimaux (*blends*) d'inputs à respecter. Quatre commandes exécutées successivement sur la même unité de *blending* (l'installation de *blending* de Ben Guerir ne comportant qu'une seule unité de mélange) pendant 28 jours. L'unité poids est la tonne. Les stocks secondaires d'inputs sont approvisionnés à partir des stocks primaires (voir la figure 2) par deux convoyeurs avec un débit de 4.000 T / jour chacun, sachant que le même input ne peut pas être acheminé par plus d'un convoyeur, afin d'éviter tout problème technique lors de l'alimentation du produit concerné en stock secondaire. Nous fixons à 8 la limite des différents inputs présents dans le stock secondaire au moment de l'horizon (relation 12). Dans ce problème, les contraintes sur la disponibilité cumulée (relation 7) et sur les stocks minimaux sont éliminées (relation 9).

Avec un taux de production quotidien de l'unité de mélange d'environ 6 200 T, le temps de production de 43,000T de QS à traiter est d'environ 7 jours. Le tableau 7 décrit le programme de production à satisfaire, les stocks d'inputs initiaux et la disponibilité cumulée des inputs i dans le stock primaire.

Tableaux 7. Données du problème

Order k=1 ; output $\lambda_{1j}=2$; $D_k=35000$ Temps Opérateur=35.000/0.77/6.200=7jours	Order k=2 ; output $\lambda_{2j}=1$; $D_k=35000$ Temps Opérateur=35.000/0.77/6.200=7jours	Order k=3 ; output $\lambda_{3j}=3$; $D_k=43000$ Temps Opérateur=43.000/6.200=7jours	Order k=4 ; output $\lambda_{4j}=1$; $D_k=35000$ Temps Opérateur=35.000/0.77/6.200=7jours
---	---	--	---

		Accumulation of the prepared ores B_{ij}															
i	S_{i0}	$t=1$	$t=2$	$t=3$	$t=4$	$t=5$	$t=6$	$t=7$...	$t=13$	$t=14$	$t=15$...	$t=27$	$t=28$		
1	0	893	1786	2679	3571	4464	5357	6250	...	11607	12500	13393	...	24107	25000		
2	4000	0	0	0	0	0	0	0	...	7286	8500	9714	...	24286	25500		
3	0	1254	2507	3761	5014	6268	7521	8775	...	16296	17550	18804	...	33846	35100		
4	0	1421	2843	4264	5686	7107	8529	9950	...	18479	19900	21321	...	38379	39800		
5	4620	1929	2857	3786	4714	5643	6571	7500	...	18571	20000	21429	...	38571	40000		
6	5032	839	1679	2518	3357	4196	5036	5875	...	10911	11750	12589	...	22661	23500		
7	4086	1776	3551	5327	7103	8879	10654	12430	...	23084	24860	26636	...	47944	49720		
8	15823	1068	2136	3204	4272	5340	6407	7475	...	13882	14950	16018	...	28832	29900		
9	7811	0	0	0	0	0	0	0	...	5571	6500	7429	...	18571	19500		
10	0	714	1429	2143	2857	3571	4286	5000	...	9286	10000	10714	...	19286	20000		
11	0	954	1907	2861	3814	4768	5721	6675	...	12396	13350	14304	...	25746	26700		
12	6956	0	0	0	0	0	0	0	...	0	0	1446	...	18804	20250		
13	0	1227	2454	3680	4907	6134	7361	8588	...	15948	17175	18402	...	33123	34350		
14	7576	1293	2585	3878	5170	6463	7755	9048	...	16803	18095	19388	...	34898	36190		

Pour l'illustration numérique nous avons considéré deux cas de figures : le « Cas 1 » ne prend pas en compte les stocks de sécurité, contrairement au « Cas 2 ».

4.2.3 Résultats du problème

On examinera successivement les solutions obtenues sans stock de sécurité (Cas 1) ou avec stock de sécurité (Cas 2). Dans les deux cas, on introduira une commande urgente à traiter au début de la semaine 3 et connue seulement à la fin de la semaine 2.

4.2.3.1 Résultats du Cas 1

La solution optimale du cas 1 est fournie dans le tableau 8 pour les blends, le tableau 9 pour les alimentations du stock secondaire par le stock primaire.

Tableaux 8. Blends optimaux du Cas 1

X_{ik}	Input i														$\sum_i X_{ij}$
	$i=1$	$i=2$	$i=3$	$i=4$	$i=5$	$i=6$	$i=7$	$i=8$	$i=9$	$i=10$	$i=11$	$i=12$	$i=13$	$i=14$	
$k=1 \rightarrow \lambda_{1j}=2$	0	2783	0	0	5024	6088	12086	10009	0	0	0	5851	0	0	41840
$k=2 \rightarrow \lambda_{2j}=1$	0	2840	12158	0	2150	0	14000	0	2026	0	0	0	0	9330	42504
$k=3 \rightarrow \lambda_{3j}=3$	0	0	0	0	1445	0	1286	0	2211	11087	0	1105	8000	17866	43000
$k=4 \rightarrow \lambda_{4j}=1$	0	14942	10667	0	0	0	714	0	3574	913	0	0	0	10319	41129
Σ	0	20563	22824	0	8620	6088	28086	10009	7811	12000	0	6956	8000	37514	168473

$X_{ik} / \sum_i X_{ij}$ (%)	$i=1$	$i=2$	$i=3$	$i=4$	$i=5$	$i=6$	$i=7$	$i=8$	$i=9$	$i=10$	$i=11$	$i=12$	$i=13$	$i=14$
$k=1 \rightarrow \lambda_{1j}=2$	0%	7%	0%	0%	12%	15%	29%	24%	0%	0%	0%	14%	0%	100%
$k=2 \rightarrow \lambda_{2j}=1$	0%	7%	29%	0%	5%	0%	33%	0%	5%	0%	0%	0%	22%	100%
$k=3 \rightarrow \lambda_{3j}=3$	0%	0%	0%	0%	3%	0%	5%	26%	0%	3%	19%	42%	100%	
$k=4 \rightarrow \lambda_{4j}=1$	0%	36%	26%	0%	0%	0%	2%	0%	9%	2%	0%	0%	25%	100%

Tableau 9. Alimentations du stock secondaire du Cas 1

		Alimentation ρ_{ij}																
i	S_{i0}	$t=1$	$t=2$	$t=3$	$t=4$	$t=5$	$t=6$	$t=7$	$t=8$	$t=9$	$t=10$	$t=11$	$t=12$	$t=13$	$t=14$	$t=15$	$t=16$	$t=17$
1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
2	4000	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	4000	0	0	0	0	0	0
3	0	0	0	0	0	0	0	0	4000	0	4000	4000	0	0	4000	0	0	0
4	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
5	4620	0	0	0	0	0	0	4000	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
6	5032	0	0	0	0	4000	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
7	4086	0	0	4000	0	4000	0	0	4000	0	4000	0	4000	0	4000	0	0	0
8	15823	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
9	7811	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
10	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	4000	4000	0	0
11	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
12	6956	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
13	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	4000	0	0	0	4000	0
14	7576	4000	4000	0	4000	4000	0	0	0	0	0	0	4000	0	4000	0	4000	4000

		Alimentation ρ_{ij}																$\rho_{\Sigma} Y_{ij}$	Retraits Cumulatifs	S_{i29}
i	S_{i0}	$t=18$	$t=19$	$t=20$	$t=21$	$t=22$	$t=23$	$t=24$	$t=25$	$t=26$	$t=27$	$t=28$								
1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0		
2	4000	0	0	0	0	0	4000	4000	4000	4000	4000	0	24000	20565	7435					
3	0	0	0	0	0	0	4000	4000	0	0	0	0	24000	22824	1176					
4	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0					
5	4620	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	4000	8620	0					
6	5032	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	4000	6088	2944					
7	4086	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	24000	28086	0					
8	15823	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	10099	5814					
9	7811	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	7811	0					
10	0	4000	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	12000	12000	0					
11	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0					
12	6956	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	6956	0				
13	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	8000	8000	0					
14	7576	4000	4000	0	4000	4000	0	0	0	4000	0	4000	36000	37514	6062					

On peut observer, dans le tableau 8, que les commandes 1 et 4 portant toutes deux sur la même QM $j=1$ ont des blends très différents, ce qui illustre bien l'impact du *blending* dynamique. La déviance par commande interne pour le cas 1 est présentée dans le tableau 10.

Tableau 10. Déviance Interne Cas 1

Cas	Contrainte sur les stocks de sécurité	Commandes internes	$c=1$	$c=2$	$c=3$	$c=4$	$c=5$	Total Déviance Interne
			Déviance Interne	Déviance Interne	Déviance Interne	Déviance Interne	Déviance Interne	
I	Non	$k=1$	314,00	0,00	35,00	163,40	0,00	512,39
		$k=2$	197,95	0,00	35,00	175,00	0,00	407,95
		$k=4$	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00

4.2.3.2 Résultats du Cas 2

Pour le Cas 2 où la contrainte sur les stocks de sécurité est intégrée, le stock initial est le maximum entre le stock observé réellement et les niveaux de stock de sécurité à avoir. Nous avons procédé de la même manière que le Cas 1 pour définir les solutions optimales. La déviance observée par commande interne avant introduction des commandes imprévues est reportée sur le tableau 11.

Tableau 11. Déviance Interne Cas 2

Cas	Contrainte sur les stocks de sécurité	Commandes internes	$c=1$	$c=2$	$c=3$	$c=4$	$c=5$	Total Déviance Interne
			Déviance Interne	Déviance Interne	Déviance Interne	Déviance Interne	Déviance Interne	
II	Oui	$k=1$	250,12	0,00	35,00	175,00	0,00	460,12
		$k=2$	0,00	0,00	35,00	166,83	0,00	201,83
		$k=4$	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00

D'après les tableaux 10 et 11, nous pouvons clairement constater que la déviance interne totale pour le Cas 2 est meilleure que le Cas 1 malgré que dans le premier Cas nous n'avons pas cherché à maintenir les niveaux de stocks initiaux.

4.2.3.3 Introduction des commandes imprévues

Nous considérons que, au cours de la période 14, nous avons reçu une commande urgente après l'achèvement des deux premières commandes. Nous avons examiné la possibilité de satisfaire les commandes au début de la période 15 (scénarios A et B). Le tableau 12 présente un résumé des deux scénarios examinés. Notre stock initial pour les deux scénarios était donc égal à celui de la fin de la période 14 ($S_{i,t=14}$). Pour le scénario B, $B_{i,t>28} = B_{i,t=28}$.

En ce qui concerne la détermination du cumul des minerais disponibles dans les périodes suivantes, nous devons soustraire de la période 15 la quantité de minerais préparés utilisée pour nourrir notre stock secondaire.

Tableau 12. Scénarios étudiés

		t																																	
		15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35													
Scénario A	Remplacer une commande externe par une commande interne	Order k	5														4																		
		Output λ_{1j}	1														2																		
		Demand D_k	35000														35000																		
Scénario B	Ajouter une commande exceptionnelle	Order k	5														3																		
		Output λ_{2j}	1														3																		
		Demand D_k	35000														43000																		

Les résultats obtenus par le modèle d'optimisation concernant notre critère d'optimisation (relation 13) pour les différents Scénarios et Cas sont regroupés dans le tableau 13.

D'après les résultats reportés sur le tableau 13 nous notons que l'absence de stock de sécurité dans le Cas I augmente considérablement la déviance interne comparée au Cas II (moins que la moitié dans le cas du scénario A). Alors que dans le scénario B, pour le Cas I, On n'a pas trouvé de solution donc on est incapable de répondre à la commande urgente, contrairement au deuxième cas (Cas II) où on a pu produire avec une déviance interne d'un peu près 330T (sur 35 000 T) pour la commande

urgente. D'où la nécessité des stocks de sécurité.

Tableau 13. Déviance Interne Cas 1 & 2

Scénario	Cas	Contrainte sur les stocks de sécurité	Commandes Internes	$c = 1$	$c = 2$	$c = 3$	$c = 4$	$c = 5$	Total Déviance Interne
				Déviance Interne	Déviance Interne	Déviance Interne	Déviance Interne	Déviance Interne	
A	I	Non	$k = 5$	0,00	0,00	14,68	0,00	0,00	14,68
			$k = 4$	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
	II	Oui	$k = 5$	0,00	0,00	5,84	0,00	0,00	5,84
			$k = 4$	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
B	I	Non	$k = 5$	Pas de Solution					
			$k = 4$	Pas de Solution					
	II	Oui	$k = 5$	110,45	0,00	35,00	175,00	0,00	320,45
			$k = 4$	0,00	0,00	9,39	0,00	0,00	9,39

Cet exemple montre que la présence des stocks de flexisécurité associée à l'utilisation du *blending* dynamique avec gamme permet de faire face à des situations imprévues avec une flexibilité maximale. Soulignons que cet exemple illustratif de la démarche proposée ne constitue pas une démonstration de l'élimination du risque par une solution avec stock de sécurité.

5 CONCLUSION

Nous proposons dans ce papier une nouvelle méthode de *blending* dynamique permettant de passer de la logique de nomenclatures figées à des nomenclatures dynamiques au fil du temps assurant une gestion flexible de la demande en qualité marchande au sein de la mine. Le concept du *blending* dynamique prend en compte : de la variation de la composition des minerais (inputs) et leurs disponibilités (au niveau de la mine et dans les stocks), de la disponibilité des processeurs de *blending*, des gammes alternatives de production des qualités marchandes, des commandes à satisfaire en termes de quantité et de qualité, des contraintes de stockage pour définir en output les quantités optimales à consommer de chaque input ainsi que les alimentations à effectuer sur l'horizon de planification. Pour contrer le risque lié à la volatilité de la demande, nous avons défini des niveaux de stocks de sécurité pour les couches sources permettant de faire face au changement qui peut survenir (en termes d'exigence qualité ou d'arrivée de demande imprévue). Les performances de notre modèle *blending* dynamique ont amené le site OCP concerné à développer et à utiliser couramment une version étendue de ce modèle sur l'axe centre, avant une probable généralisation.

6 REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES

Ashayeri, J., van Eijls, A. G. M., & Nederstigt, P. (1994). Blending modelling in a process manufacturing: A case study. *European Journal of Operational Research*, 72(3), 460–468. [https://doi.org/10.1016/0377-2217\(94\)90416-2](https://doi.org/10.1016/0377-2217(94)90416-2)

Ayyub, B. M., & Klir, G. J. (2006). *Uncertainty modeling and analysis in engineering and the sciences*. Chapman and Hall/CRC.

Bengtsson, J., Bredström, D., Flisberg, P., & Rönnqvist, M. (2013). Robust planning of blending activities at refineries. *The Journal of the Operational Research Society*, 64(6), 848–863.

Ben-Tal, A., El Ghaoui, L., & Nemirovski, A. (2009). *Robust optimization*. Princeton series in applied mathematics. Princeton University Press Princeton.

Ben-Tal, A., & Nemirovski, A. (2000). Robust solutions of linear programming problems contaminated with uncertain data. *Mathematical Programming*, 88(3), 411–424.

Bilgen, B., & Ozkarahan, I. (2007). A mixed-integer linear

programming model for bulk grain blending and shipping. *International Journal of Production Economics*, 107(2), 555–571. <https://doi.org/10.1016/j.ijpe.2006.11.008>

Cain, M., & Price, M. L. R. (1986). Optimal Mixture Choice. *Journal of the Royal Statistical Society. Series C (Applied Statistics)*, 35(1), 1–7. <https://doi.org/10.2307/2347858>

Chanda, E. K. C., & Dagdelen, K. (1995). Optimal blending of mine production using goal programming and interactive graphics systems. *International Journal of Surface Mining, Reclamation and Environment*, 9(4), 203–208. <https://doi.org/10.1080/09208119508964748>

Dantzig, G. B. (1982). Reminiscences about the origins of linear programming. *Operations Research Letters*, 1(2), 43–48.

Dubois, D., & Prade, H. (2009). Formal representations of uncertainty. *Decision-Making Process: Concepts and Methods*, 85–156.

Goldsmith, P. L. (1966). The Theoretical Performance of a Semi-Continuous Blending System. *Journal of the Royal Statistical Society. Series D (The Statistician)*, 16(3), 227–251. <https://doi.org/10.2307/2986871>

Jonuzaj, S., & Adjiman, C. S. (2017). Designing optimal mixtures using generalized disjunctive programming: Hull relaxations. *Chemical Engineering Science*, 159, 106–130. <https://doi.org/10.1016/j.ces.2016.08.008>

Karmarkar, U. S., & Rajaram, K. (2001). Grade Selection and Blending to Optimize Cost and Quality. *Operations Research*, 49(2), 271–280.

Keynes, J. M. (1936). *The general theory of interest, employment and money*.

Klir, G. J., & Wierman, M. J. (1999). *Uncertainty-based information: Elements of generalized information theory*.

Knight, F. H. (1921). *Risk, uncertainty and profit*.

Kouvelis, P., & Yu, G. (n.d.). *Robust discrete optimization and its applications*. 1997. Kluwer Academic Publishers, Boston.

Kumral, M. (2003). Application of chance-constrained programming based on multi-objective simulated annealing to solve a mineral blending problem. *Engineering Optimization*, 35(6), 661–673.

Kural, A., & Özsoy, C. (2004). Identification and control of the raw material blending process in cement industry. *International Journal of Adaptive Control and Signal Processing*, 18(5), 427–442. <https://doi.org/10.1002/acs.805>

Lin, X., Janak, S. L., & Floudas, C. A. (2004). A new robust optimization approach for scheduling under uncertainty: I. Bounded uncertainty. *Computers & Chemical Engineering*, 28(6–7), 1069–1085.

Montante, G., Coroneo, M., & Paglianti, A. (2016). Blending of miscible liquids with different densities and viscosities in static mixers. *Chemical Engineering Science*, 141, 250–260. <https://doi.org/10.1016/j.ces.2015.11.009>

Naji, W. (2018). *Robust Optimization and Stability Analysis for Parallel Machine Scheduling*. University Grenoble Alpes.

Oberkampf, W. L., Trucano, T. G., & Hirsch, C. (2004). Verification, validation, and predictive capability in computational engineering and physics. *Applied Mechanics Reviews*, 57(5), 345–384. <https://doi.org/10.1115/1.1767847>

Oddsottir, T. A., Grunow, M., & Akkerman, R. (2013). Procurement planning in oil refining industries considering blending operations. *Computers & Chemical Engineering*, 58, 1–13.

Rockafellar, R. T., & Wets, R. J.-B. (1991). *Scenarios and policy*

- aggregation in optimization under uncertainty. *Mathematics of Operations Research*, 16(1), 119–147.
- Smithson, M. (1989). Ignorance and uncertainty: Emerging paradigms.
- Steuer, R. E. (1984). Sausage Blending Using Multiple Objective Linear Programming. *Management Science*, 30(11), 1376–1384.
- Stigler, G. J. (1945). The Cost of Subsistence. *Journal of Farm Economics*, 27(2), 303–314. <https://doi.org/10.2307/1231810>
- Stokes, J. R., & Tozer, P. R. (2006). Optimal Feed Mill Blending. *Review of Agricultural Economics*, 28(4), 543–552.
- Walker, W. E., Harremoës, P., Rotmans, J., van der Sluijs, J. P., van Asselt, M. B., Janssen, P., & Kreyer von Krauss, M. P. (2003). Defining uncertainty: a conceptual basis for uncertainty management in model-based decision support. *Integrated Assessment*, 4(1), 5–17.
- Wierman, M. J. (2010). An introduction to the mathematics of uncertainty. Creighton University, 149–150.
- Williams, K. B., & Haley, K. B. (1959). A practical application of linear programming in the mining industry. *Journal of the Operational Research Society*, 10(3), 131–137.
- Yoon, W. B., Park, J. W., & Kim, B. Y. (1997). Linear Programming in Blending Various Components of Surimi Seafood. *Journal of Food Science*, 62(3), 561–564. <https://doi.org/10.1111/j.1365-2621.1997.tb04430.x>
- Zhang, R., Lu, J., & Zhang, G. (2011). A knowledge-based multi-role decision support system for ore blending cost optimization of blast furnaces. *European Journal of Operational Research*, 215(1), 194–203. <https://doi.org/10.1016/j.ejor.2011.05.037>