

UN MODELE DE BLENDING POUR LA PLANIFICATION DYNAMIQUE D'UNE CHAINE LOGISTIQUE MINIERE

M. BAMOUMEN^{a, b}, V. HOVELAQUE^{a, b}, V. GIARD^{a, c}

^a Mines-Université Mohammed VI Polytechnique, Benguerir, Maroc

^b Univ-Rennes, CNRS, CREM - UMR 6211, F-35000 Rennes, France

^c Paris-Dauphine, PSL Research University, 75016, Paris, France

{Mouna.Bamoumen, Vincent.Giard}@emines.um6p.ma, Vincent.Hovelaque@univ-rennes1.fr, Vincent.Giard@dauphine.psl.eu

RESUME : Les différentes qualités de minerais de phosphate extraits (Inputs Primaires – IP) ne répondent pas aux spécifications de qualités marchandes requises (Output). Pour y parvenir, deux traitements sont généralement nécessaires : un mélange d'IP suivi d'un passage en laverie qui enrichit le mélange et en modifie la composition, plusieurs gammes étant possibles, avec des temps de changement de gamme significatifs. Sur le site minier de Khouribga, les laveries sont difficilement alimentées par des mélanges d'IP. Elles traitent donc en continu une succession des lots d'IP qui, en sortie, deviennent des lots d'Inputs Intermédiaires (II) acheminés par pipe vers une cuve de stockage avec des temps de transport significatifs. Le mélange obtenu par l'alimentation, pendant la même durée, de 5 lots d'II provenant des 5 laveries doit respecter les contraintes de composition de l'output commandé, avant expédition au client par pipe. Le modèle présenté vise à définir le programme synchronisé de prélèvements des IP et des gammes de laverie à utiliser, pour satisfaire un programme d'expédition d'outputs, tenant compte des temps d'acheminement et des disponibilités des IP. La modélisation de ce problème original de blending continu, non identifié dans la littérature, est quadratique. Un exemple réel de son utilisation est fourni.

MOTS-CLES : Modélisation des systèmes continus, Recherche opérationnelle, Gestion de production, Gestion de la qualité, Blending, Gammes alternatives.

1 INTRODUCTION

Ce papier s'intéresse à une variante du classique problème de blending, rencontré sur le site de Khouribga de l'OCP (principale entreprise mondiale d'extraction du phosphate) décrit à la Figure 1 (qui fournit les principales caractéristiques du problème posé). Ce site a comme principal objectif d'alimenter les usines chimiques de l'OCP (client interne) et l'exportation (client externe) par des lots de produits (Outputs) fabriqués à partir de minerais et envoyés en continu par un pipeline long de 187 kms à partir d'une station de tête (ST) comportant deux cuves de 9000 m³. Un output doit respecter des contraintes de composition, de type [Min-Max], portant sur un ensemble de composants chimiques. Les minerais extraits, qualifiés ici d'Inputs Primaires (IP), sont caractérisés par ces mêmes composants, mais vérifient rarement les contraintes de composition des outputs. La solution classique d'un blending à sec d'IP, avant éventuel traitement complémentaire en laverie, pour obtenir un output conforme (Azzamouri *et al*, 2020), n'est techniquement pas possible sur ce site de Khouribga, qui comporte cinq laveries, où une laverie est alimentée par une séquence de lots d'IP. Le passage en laverie d'un lot d'IP produit un lot d'input intermédiaire (II) de caractéristiques volumiques et de composition qui dépend du choix de l'une des trois gammes de lavage possibles. Le scénario de fonctionnement modélisé et illustré numériquement dans cet article se fonde sur le principe

d'un mélange dans la ST de 5 lots d'II provenant simultanément des 5 laveries, ce mélange respectant les contraintes de composition du lot d'output demandé.

Le problème de blending étudié dans ce papier présente une originalité liée à la combinaison de plusieurs caractéristiques, à savoir : *i*) Les laveries traitent successivement des lots d'IP (pas de mélange en entrée de la laverie) ; *ii*) plusieurs gammes existent pour obtenir un lot d'II ; elles impactent à la fois la composition de l'II et la réduction de poids en sortie de laverie ; *iii*) le changement de gamme peut s'accompagner d'un temps de lancement qui stoppe la production de la laverie ; *iv*) les pipes d'alimentation de la ST contiennent des quantités d'II dépendant du débit et de l'éloignement de la laverie ; en conséquence, le programme de production d'II en laverie doit tenir compte de temps de transport pour assurer une alimentation synchronisée de la station de tête par les lots d'II en provenance des 5 laveries ; *v*) la production étant continue, il faut tenir compte de résidus présents dans les laveries (voir figure 1) lors du lancement en fabrication d'un nouvel II ; les commandes d'outputs portant sur des volumes supérieurs à la capacité de la cuve de la ST, (9000 m³), chaque commande est scindée en deux commandes élémentaires, la première de 9000 m³ et la seconde portant sur le volume résiduel ; la première commande élémentaire, va progressivement remplir une cuve vide en commençant par accueillir les résidus des II précédents présents dans les 5 laveries (5 lots pour un total de 1750 m³, voir figure 1) puis

les nouveaux II (5 autres lots pour un total de $9000 - 1750 = 7.250 \text{ m}^3$), le respect des contraintes de composition de l'output étant assuré en pratique par ces 10 lots élémentaires, ce qui fait que, le vidage de la cuve de la ST n'est possible qu'une fois la cuve pleine ; pour la seconde commande élémentaire, le vidage et le remplissage peuvent être simultanés, les contraintes de composition étant respectée au mélange effectué à l'entrée de la cuve; vi) les disponibilités et caractéristiques chimiques des IP varient au cours du temps en fonction des prélèvements et de l'extraction minière (à flux poussés).

Les inputs qui ne sont pas exportés sont directement utilisés pour produire de l'acide phosphorique dans des usines chimiques de l'OCP. Les contraintes de composition sont

respectées par tous les outputs et, à la demande du client industriel, on a introduit une contrainte technique additionnelle. En cohérence avec le processus industriel, le critère d'optimisation retenu est celui de la stabilisation de la composition de deux commandes successives, pour limiter l'incidence de la variation de composition de deux commandes successives.

Ce problème original de blending est formulé par un programme mathématique quadratique en nombres entiers, visant à déterminer simultanément les quantités d'IP à prélever et leurs gammes de traitement en laverie, en tenant compte de l'ensemble des caractéristiques citées précédemment (§2). Une application numérique est fournie en §3, avant une brève conclusion.

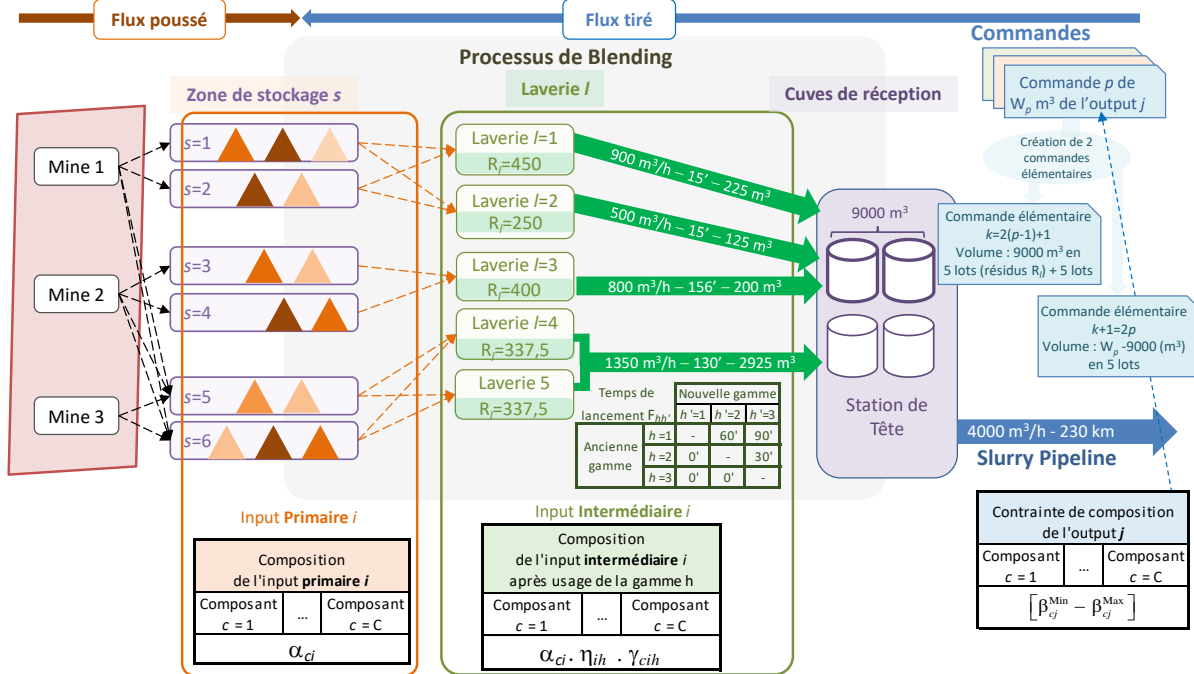


Figure 1 : Schéma de flux de la chaîne logistique étudiée

2 DESCRIPTION DU PROBLEME ET FORMULATION MATHÉMATIQUE

Le problème considéré consiste à satisfaire un ensemble séquentiel de P commandes, chacune étant caractérisée par un output à fabriquer parmi J outputs et un volume W_p (exprimé en m^3). Pour chaque output, il faut respecter des contraintes de composition définies par des bornes inférieures et supérieures pour quatre composants chimiques. Pour les raisons expliquées dans l'introduction, la commande p est décomposée en deux commandes élémentaires, la première indexée par $k = 2 \cdot p - 1$ et la seconde par $k + 1 = 2 \cdot p$. Le volume de la première commande élémentaire est équivalent au remplissage d'une cuve de la ST (9000 m^3) par des II provenant simultanément de L=5 laves, sans vidage préalable de la cuve ; la seconde commande élémentaire, d'un volume $W_p - 9000$ est constituée dès le début du vidage du lot précédent dans le slurry pipeline, le vidage et le remplissage pouvant donc s'effectuer simultanément pour ce second lot élémentaire.

En amont de chaque ligne de laverie se trouve un sous-ensemble de I IP, répartis dans l'une des S=6 zones de stockage selon le gisement d'où il a été extrait. Pour la constitution d'une commande élémentaire, chaque laverie est alimentée par un seul IP, donnant lieu à un II à l'aide d'une seule gamme h, parmi H=3 gammes possibles. Chaque gamme engendre 1) des pertes de matières suivant un coefficient de réduction propre à cette gamme, 2) une augmentation ou diminution de la concentration des composants chimiques de l'IP traité, suivant des coefficients de distorsion relatifs à cette gamme. Le traitement d'un IP dans une laverie prend environ 30', quelle que soit la laverie. En conséquence, lors du changement d'IP alimentant la laverie l, sa cuve contient un lot de l'IP précédent, de volume R_l , équivalent à un résidu d'une demi-heure de production de la laverie en question (donc dépendant du débit de cette laverie). Ce changement d'IP engendre des coûts supplémentaires liés au déplacement de machines de déstockage en amont des laves que l'on cherche à limiter.

Le changement de gamme sur une laverie peut donner lieu à un temps de lancement pendant lequel l'IP précédent

séjourne dans les installations avant reprise de l'alimentation (voir figure 1). Ces temps de lancement sont pris en compte dans la distribution des volumes à produire sur chaque laverie, afin de maintenir une synchronisation de production de la commande élémentaire en question (si une laverie est momentanément neutralisée en raison d'un temps de lancement, la production équivalente à ce temps est répartie sur les autres laveries).

Par ailleurs, le critère d'optimisation retenu dans le modèle vise à minimiser les coûts de production des outputs (extraction et traitements en laverie) tout en cherchant à stabiliser la composition des outputs commandés par le client interne. Pour ce dernier, la composition d'une commande interne doit être la plus proche d'une structure cible pour éviter des coûts de réglages élevés (difficilement quantifiables actuellement), ce qui conduit à introduire dans le critère d'optimisation la valorisation de la déviance par un coût de pénalité arbitraire qui permet d'orienter la solution retenue dans l'ensemble des solutions respectant les contraintes du problème ; nous discuterons au §3.2 l'impact du choix de cette pénalité.

Le modèle détermine pour chaque laverie la quantité d'IP à traiter pour obtenir le lot de l'II utilisé pour fabriquer une commande élémentaire, en tenant compte des impératifs de synchronisation et d'éventuels temps de lancements ainsi que la gamme à utiliser.

2.1 Indices

- i : indice de l'input ($i = 1 \dots I$).
- c : indice du composant chimique ($c = 1 \dots C$).
- s : indice de la zone de stockage des inputs ($s = 1 \dots S$).
- h : indice de la gamme ($h = 1 \dots H$).
- l : indice de la laverie ($l = 1 \dots L$).
- p : indice de la commande à fabriquer ($p = 1 \dots P$).
- k : indice de la commande élémentaire à fabriquer ($k = 1 \dots K$).
- j : indice de l'output ($j = 1 \dots J$).

2.2 Paramètres

Les poids sont exprimés en tonne, les volumes en m^3 et les coûts en euro, à partir de coûts conventionnels pour des raisons évidentes de confidentialité. La conversion de la tonne en m^3 est assurée par un coefficient noté θ , qui exprime le produit de la densité (en tonne/ m^3) par un indicateur nommé taux de solide (en %), exprimant la concentration du produit dans l'eau.

- τ_l : numéro de l'IP présent dans la laverie l au début de la fabrication de la première commande élémentaire.
- R_l : volume résiduel dans la laverie l au début de la fabrication d'une commande élémentaire.
- α_{ci} : proportion du composant c dans le poids de l'IP i .
- α_{ct} : proportion du composant c dans le poids du volume résiduel R_l de l'IP τ_l à la laverie l au début de la fabrication de la première commande élémentaire.

- ψ_i : numéro de la zone de stockage de l'IP i .
- S_{i0} : quantité de l'IP i disponible au stock amont au début de l'horizon considéré (tonne).
- μ_k : numéro d'output de la commande élémentaire k .
- ρ_l : minimum entre le débit de production et de transfert pour une laverie l .
- G_l : nombre maximal de changement autorisé d'IP sur la ligne l .
- E_k : booléenne valant 1 si la commande élémentaire k concerne un client interne, 0 sinon.
- η_{ih} : coefficient de réduction de l'IP i par la gamme h . Si la gamme h n'est pas utilisable pour traiter l'IP i , alors $\eta_{ih} = 0$.
- γ_{cih} : coefficient de distorsion du composant c de l'IP i par la gamme h .
- $F_{hh'}$: temps de lancement lors du passage d'une gamme h à une gamme h' .
- β_{cj}^{\min} : borne inférieure de la proportion (%) du composant c dans le poids de l'output j ; l'output de la commande élémentaire k étant noté μ_k , cette borne devient $\beta_{c\mu_k}^{\min}$.
- β_{cj}^{\max} : borne supérieure de la proportion (%) du composant c dans le poids de l'output j ; l'output du lot élémentaire k étant notée μ_k , cette borne devient $\beta_{c\mu_k}^{\max}$.
- δ_{cj} : valeur cible de la proportion (%) du composant c dans le poids de l'output j ; l'output du lot élémentaire k étant notée μ_k , cette valeur devient $\delta_{c\mu_k}$. Cette valeur cible n'est utilisée que si l'output j est commandé par un client interne ($E_k = 1$).
- W_k : volume de la commande élémentaire k à fabriquer.
- Π_{sl} : booléenne valant 1 si la zone de stockage s alimente la laverie l , et 0 sinon.
- θ : coefficient de conversion du poids (tonne) en volume (m^3).
- σ_c : coût unitaire (par m^3) de la pénalité associée à l'écart absolu $_{ck}$ entre la quantité cible souhaitée $_{cj}$ du composant c de l'output j et celle obtenue par le mélange produisant cet output.
- χ : coût d'extraction d'une tonne d'IP.
- δ_h : coût de traitement d'une tonne d'IP par la gamme h .

2.3 Variables

- ω_{ihk} : variable de décision - binaire valant 1 si l'IP i est traité par la gamme h sur la laverie l pour produire la commande élémentaire k , 0 sinon.
- y_{ilk} : variable intermédiaire - binaire valant 1 s'il y a changement d'IP à traiter sur de la laverie l entre les commandes élémentaires $k-1$ et k , 0 sinon.
- $z_{hh'lk}$: variable intermédiaire - binaire valant 1 s'il y a changement d'une gamme h à la gamme $h' \neq h$ sur la

laverie l entre les commandes élémentaires $k-1$ et k , 0 sinon.

- S_{ik} : variable intermédiaire – stock de l'IP i (tonne) à la fin de fabrication de la commande élémentaire k .

- T_k : variable intermédiaire – durée de production du lot élémentaire k sur les laveries.

- v_{kl} : variable intermédiaire - volume à produire sur la laverie l pour la constitution de la commande élémentaire k .

- λ_{clk} : variable intermédiaire – poids du composant c dans le volume v_{kl} produit par la laverie l pour la constitution de la commande élémentaire k .

- Δ_{ck} : Variable intermédiaire – écart absolu du composant c de sa valeur cible dans la commande élémentaire k , passée par un client interne ($E_k = 1$).

2.4 Contraintes

La relation 1 impose, pour la fabrication d'une commande élémentaire k , de traiter un seul IP i sur une laverie l avec une seule gamme h . La restriction $\Pi_{\psi,l} \eta_{ih} > 0$ est introduite car la variable ω_{ihk} n'existe que pour les IPs qui peuvent être traitées sur la laverie l ($\Pi_{\psi,l} > 0$) et utiliser la gamme h ($\eta_{ih} > 0$). Cette notion de prédicat¹ a l'avantage de limiter drastiquement le nombre de variables dans le modèle d'optimisation.

$$\sum_{h,i} \omega_{ihk} \Pi_{\psi,l} \eta_{ih} > 0 = 1; \forall l, k \quad (1)$$

Les deux relations 2 permettent de respecter les contraintes de convoyage de telle sorte que chacune des deux laveries $l=1$ et $l=2$ (et donc $l < 3$) soient alimentées par une seule zone parmi $s=1$ et $s=2$ (respectivement chacune des laveries $l=4$ et $l=5$ (et donc $l > 3$ $l > 3$) soient alimentées par une seule zone parmi $s=5$ et $s=6$).

$$\begin{cases} \sum_{i,h,l,l < 3 \wedge \psi_i = s \wedge \Pi_{\psi,l} \eta_{ih} > 0} \omega_{ihk} \leq 1, \forall k, s | s \in \{1, 2\} \\ \sum_{i,h,l,l > 3 \wedge \psi_i = s \wedge \Pi_{\psi,l} \eta_{ih} > 0} \omega_{ihk} \leq 1, \forall k, s | s \in \{5, 6\} \end{cases} \quad (2)$$

Sur une laverie l , on a un passage de la gamme h à la gamme h' ($h \neq h'$) entre deux commandes consécutives $k-1$ et k ($k > 1$), si la somme $\sum_{i \in \Pi_{\psi,l} \eta_{ih'} > 0} \omega_{ih'k} + \sum_{i \in \Pi_{\psi,l} \eta_{ih} > 0} \omega_{ihk-1}$ vaut 2. Si par contre cette somme vaut 1 ou 0, alors la laverie l opère les deux commandes successives $k-1$ et k avec la même gamme. Ainsi, la variable binaire $z_{hh'lk}$ doit vérifier les conditions suivantes : $z_{hh'lk} = 1$ si la somme précédente vaut 2 ;

$z_{hh'lk} = 0$ si la somme précédente est < 2 . Les relations 3 permettent de modéliser ces conditions.

$$\begin{cases} z_{hh'lk} \geq \left(\sum_{i \in \Pi_{\psi,l} \eta_{ih'} > 0} \omega_{ih'k} + \sum_{i \in \Pi_{\psi,l} \eta_{ih} > 0} \omega_{ihk-1} \right) - 1 \\ z_{hh'lk} \leq \frac{\sum_{i \in \Pi_{\psi,l} \eta_{ih'} > 0} \omega_{ih'k} + \sum_{i \in \Pi_{\psi,l} \eta_{ih} > 0} \omega_{ihk-1}}{2} \end{cases} \quad (3)$$

$$\forall h, h', l, k | k > 1 \wedge F_{hh'} > 0$$

La relation 4 permet de déterminer la durée de production d'une commande élémentaire k en répartissant le volume total W_k de la commande élémentaire k sur l'ensemble des laveries, compte tenu des arrêts de production $\sum_{h,h',l \in F_{hh'} > 0} F_{hh'} \cdot z_{hh'lk} \cdot \rho_l$, suite à un éventuel changement de gamme entre deux commandes consécutives.

$$T_k = (W_k + \sum_{hh',l \in F_{hh'} > 0} F_{hh'} \cdot z_{hh'lk} \cdot \rho_l) / \sum_l \rho_l, \forall k \quad (4)$$

La relation 5 exprime le volume à produire sur la laverie l pour la fabrication de la commande élémentaire k compte tenu d'éventuels changements de gamme entre deux commandes consécutives.

$$v_{kl} = (T_k - \sum_{hh',l \in F_{hh'} > 0} F_{hh'} \cdot z_{hh'lk}) \cdot \rho_l, \forall l, k \quad (5)$$

La relation 6 permet le calcul du stock d'un IP i à la fin de la production d'une commande élémentaire k , en retranchant du stock initial, le cumul des volumes consommés d'un IP i , ramené à la tonne en multipliant par le coefficient θ/η_{ih} . A noter que cette relation est non linéaire à cause du produit de deux variables $v_{kl} \cdot \omega_{ihk}$ ².

$$S_{ik} = S_{i0} - \sum_{h,l,k' \leq k \wedge \Pi_{\psi,l} \eta_{ih} > 0} v_{k'l} \cdot \omega_{ihk'} \cdot \theta / \eta_{ih}; \forall i, k \quad (6)$$

La relation 7 impose de ne pas consommer plus d'IP que les quantités disponibles en stock.

$$S_{ik} \geq 0; \forall i, k \quad (7)$$

Sur une laverie l , on a un passage de l'IP i' à l'IP i ($i \neq i'$) entre deux commandes élémentaires consécutives $k-1$ et k si les différences $\sum_h \omega_{ihk} - \sum_h \omega_{ihk-1} = 1$ et $\sum_h \omega_{i'hk} - \sum_h \omega_{i'hk-1} = -1$. En effet, l'expression $\sum_h \omega_{ihk} - \sum_h \omega_{ihk-1} = 1$ signifie que l'IP i n'est pas utilisé sur la laverie l pour la fabrication de la commande $k-1$ mais l'est pour la fabrication de la commande k (et inversement pour l'expression $\sum_h \omega_{ihk} - \sum_h \omega_{ihk-1} = -1$). Si par contre cette différence vaut 0, il n'y a pas de changement d'IP sur la laverie l entre deux commandes consécutives. Pour ne pas comptabiliser le changement d'IP deux fois, la variable binaire y_{ilk} doit vérifier les conditions suivantes : si $\sum_h \omega_{ihk} - \sum_h \omega_{ihk-1} = 1$ alors

¹ L'opérateur " | " définit une restriction de l'ensemble d'indices utilisés pour définir une variable souscrite, comme dans la somme (Σ) de variables souscrites ou dans une expression de répétition (quantificateur \forall).

² Relation (6) est non linéaire mais est linéarisée par la propriété suivante : soient x , w et z trois variables binaires. Alors l'expression $z = x \cdot w$ est équivalente aux deux inégalités suivantes : $z \geq x + w - 1$ et $z \leq \frac{x + w}{2}$

$y_{ilk} = 1$; si $\sum_h \omega_{ihlk} - \sum_h \omega_{ihlk-1}$ vaut 0 ou -1 alors $y_{ilk} = 0$. Ces conditions peuvent être exprimées de façon linéaire par les relations 8.

$$\begin{cases} y_{ilk} \geq \frac{\sum_{h \mid \Pi_{\psi,l} \cdot \eta_{ih} > 0} \omega_{ihlk} - \sum_{h \mid \Pi_{\psi,l} \cdot \eta_{ih} > 0} \omega_{ihlk-1}}{2} - \frac{1}{4} \\ y_{ilk} \leq \frac{\sum_{h \mid \Pi_{\psi,l} \cdot \eta_{ih} > 0} \omega_{ihlk} - \sum_{h \mid \Pi_{\psi,l} \cdot \eta_{ih} > 0} \omega_{ihlk-1}}{2} + \frac{1}{2} \\ y_{ilk} \geq 0 \\ \forall i, l, k \mid k > 1 \end{cases} \quad (8)$$

La relation 9 limite le nombre de changement d'IP entre deux commandes élémentaires consécutives sur une laverie l par un nombre maximal de changements autorisés G_l .

$$\sum_{i, k \mid k > 1 \wedge \Pi_{\psi,l} > 0} y_{ilk} \leq G_l ; \forall l \quad (9)$$

Les relations 10 calculent le poids λ_{clk} du composant c dans le volume v_{kl} produit par la laverie l pour la fabrication d'une commande k compte tenu du résidu des laveries. On distingue alors deux cas : 1) pour $k=1$, la proportion α_{ci} du composant c du résidu sur la laverie l est connue au début de la fabrication de celui-ci ; 2) pour une commande $k > 1$, la composition du résidu sur une laverie vaut la composition de l'IP traité pour la fabrication du lot $k-1$. À noter que les relations 10 sont également non linéaires mais linéarisées par la méthode présentée en note de la page précédente.

$$\begin{cases} \lambda_{clk} = \begin{pmatrix} R_l \cdot \alpha_{ci} \\ + \sum_{i, k, h \mid \Pi_{\psi,l} \cdot \eta_{ih} > 0} (v_{kl} - R_l) \cdot \omega_{ihlk} \cdot \alpha_{ci} \cdot \gamma_{cih} \end{pmatrix} \\ ; \forall c, l, k \mid k = 1 \\ \lambda_{clk} = \begin{pmatrix} \sum_{i, h \mid \Pi_{\psi,l} \cdot \eta_{ih} > 0} R_l \cdot \omega_{ihlk-1} \cdot \alpha_{ci} \cdot \gamma_{cih} \\ + \sum_{i, h \mid \Pi_{\psi,l} \cdot \eta_{ih} > 0} (v_{kl} - R_l) \cdot \omega_{ihlk} \cdot \alpha_{ci} \cdot \gamma_{cih} \end{pmatrix} \\ ; \forall c, l, k \mid k > 1 \end{cases} \quad (10)$$

La relation 11 impose le respect des bornes supérieures et inférieures de chaque composant c pour l'ensemble des flux des laveries mobilisées pour la fabrication de la commande élémentaire k (Tableau 2 de §3). Cette relation n'est pas valable pour le composant $c=4$ de l'output $j=1$, pour lequel la contrainte de composition est exprimée par la relation 12.

$$\beta_{c\mu_k}^{\text{Min}} \cdot \sum_l v_{kl} \leq \sum_l \lambda_{clk} \leq \beta_{c\mu_k}^{\text{Max}} \cdot \sum_l v_{kl} ; \forall c, k \mid c < 4 \vee (c = 4 \wedge \mu_k \neq 1) \quad (11)$$

La relation 12 traduit la contrainte entre les composants $c=1$ ($\sum_l \lambda_{c=1, lk}$) et $c=4$ ($\sum_l \lambda_{c=4, lk}$) pour l'output $j=1$, exprimée par le client interne, seul à commander cet output.

$$\beta_{c\mu_k}^{\text{Min}} \cdot \sum_l \lambda_{c=1, lk} \leq 218,5 \cdot \sum_l \lambda_{c=4, lk} \leq \beta_{c\mu_k}^{\text{Max}} \cdot \sum_l \lambda_{c=1, lk} ; \forall k \mid \mu_k = 1 \quad (12)$$

Les relations 13 calculent les écarts absolus entre la composition de la commande élémentaire et la valeur cible des composants demandée par un client interne.

$$\begin{cases} \Delta_{ck} \geq \sum_l \lambda_{clk} - \delta_{c\mu_k} \cdot \sum_l v_{kl} ; \forall c, k \mid E_k = 1 \\ \Delta_{ck} \geq \delta_{c\mu_k} \cdot \sum_l v_{kl} - \sum_l \lambda_{clk} \end{cases} \quad (13)$$

La relation 14 impose le respect de conditions d'opérabilité des gammes sur certaines laveries. Dans notre cas, si la laverie $l=4$ utilise la gamme $h=2$, alors la laverie $l=5$ ne peut opérer qu'avec la gamme $h=1$.

$$\begin{cases} \omega_{i, h=2, l=5, k} \leq 1 - \sum_{h > 1} \omega_{i, h=4, k} ; \forall i, k \\ |(\Pi_{\psi, l=4} \cdot \eta_{ih=2} > 0 \vee \Pi_{\psi, l=4} \cdot \eta_{ih=3} > 0) \wedge \Pi_{\psi, l=5} \cdot \eta_{ih=2} > 0| \end{cases} \quad (14)$$

La fonction-objectif 15 est une somme 1) du coût de la stabilité de la composition des commandes élémentaires k autour des valeurs cibles fixées pour les composants considérés ; ce coût totalement arbitraire est propre à chaque composant chimique ; 2) du coût de perte de matière lié à l'utilisation des gammes ; ce coût est composé du coût unitaire d'une tonne d'IP extrait, noté χ , et du coût unitaire d'une tonne d'IP traité par la gamme h , noté δ_h .

$$\text{Min} \left(\sum_{ck} \sigma_c \cdot \Delta_{ck} + \sum_{ihk} (\chi + \delta_h) \cdot \omega_{ihlk} \cdot v_{kl} \cdot (1 - \eta_{ih}) \cdot (\theta / \eta_{ih}) \right) \quad (15)$$

3 ILLUSTRATION

Dans la présente section, nous présentons dans une première partie les données d'entrée pour le test, suivie des résultats fournis par optimisation linéaire du modèle élaboré dans la section §2, avant de finir avec la génération du programme horaire de production des lignes sur un horizon temporel.

3.1 Données du test

Le modèle mathématique linéaire a été testé avec des données proches de celles employées par le Groupe OCP dans la planification de sa production du site minier de Khouribga (les données structurelles sont réelles et les données concernant l'état initial sont proches de la réalité). Dans ce test, 18 IP répartis sur les 6 zones de stockage ont été retenus. Pour chaque IP sont connus les caractéristiques chimiques, les coefficients de réduction (Tableau 1) et les coefficients de distorsion des composants selon les trois modes de traitement possibles.

L'étude a été réalisée sur deux outputs qui sont actuellement expédiés par pipeline ; l'output $j=1$ est commandé par un client interne. Les contraintes de composition de ces outputs pour les quatre composants chimiques retenus sont fournies dans le Tableau 2.

Dans l'exemple retenu, quatre commandes sont programmées sur un horizon d'un jour. Chaque commande est donc décomposée en deux commandes élémentaires, soit huit commandes élémentaires à fabriquer au total (Tableau 3).

Sur l'horizon considéré, seul un changement d'IP est autorisé par laverie pour la fabrication de l'ensemble des huit commandes élémentaires. En outre, l'état initial des productions en cours sur les laveries au début de l'horizon considéré est fourni sur le Tableau 4.

Par ailleurs, les coûts de la fonction-objectif sont définis comme suit : le coût unitaire pour chaque m³ d'écart aux valeurs cibles est identique pour tous les composants, fixé à $\sigma_c = \sigma = 100$; les coûts unitaires d'extraction ($\chi=3$) et de traitement ($\varphi_{h=1}=2$; $\varphi_{h=2}=4$; $\varphi_{h=3}=5$) sont factices pour des raisons de confidentialité.

3.2 Solution obtenue

Dans la partie présente, nous présentons les résultats d'optimisation obtenus avec le modèleur Xpress. Le temps de résolution est d'une demi-heure environ sur un serveur d'une vitesse d'exécution de 3.5 GHz et d'une mémoire installée de 64 Go.

Le Tableau 5 présente, pour chaque laverie l , les IP à prélever et leur zone de stockage s , la quantité de prélèvement (en tonne) et la gamme h à appliquer pour la fabrication de chacun des huit commandes élémentaires.

Zone de stockage s	$s=1$			$s=2$			$s=3$			$s=4$			$s=5$			$s=6$			
IP i	$i=1$	$i=2$	$i=3$	$i=4$	$i=5$	$i=6$	$i=7$	$i=8$	$i=9$	$i=10$	$i=11$	$i=12$	$i=13$	$i=14$	$i=15$	$i=16$	$i=17$	$i=18$	
Quantité initiale (10 ³ tonne)	12	15	15	15	12	15	12	15	12	12	15	15	15	15	12	15	12	15	
Composition chimique	$c=1$	56,0%	60,0%	55,0%	54,0%	61,0%	62,0%	61,4%	58,6%	57,0%	59,0%	54,4%	61,0%	64,5%	61,5%	60,3%	55,5%	60,5%	61,0%
	$c=2$	1,5%	1,0%	1,7%	1,3%	1,3%	1,6%	1,0%	1,1%	1,3%	1,2%	1,2%	1,4%	0,7%	0,9%	1,1%	0,9%	0,7%	1,1%
	$c=3$	3,3%	3,1%	3,5%	3,4%	2,9%	3,2%	4,7%	5,6%	3,9%	5,0%	5,6%	4,1%	4,6%	5,1%	4,4%	7,0%	5,7%	4,8%
	$c=4$	0,0020%	0,0019%	0,0022%	0,0018%	0,0017%	0,0019%	0,0021%	0,0022%	0,0023%	0,0022%	0,0025%	0,0021%	0,0022%	0,0020%	0,0020%	0,0021%	0,0018%	0,0020%
Coefficient de réduction	$h=1$	0,64	0,69	0,64	0,64	0,69	0,69	0,72	0,67	0,66	0,67	0,66	0,67	0,78	0,71	0,71	0,69	0,71	0,71
	$h=2$	0,58	0,63	0,58	0,58	0,63	0,63	0,71	0,66	0,65	0,66	0,65	0,66	0,75	0,63	0,63	0,6	0,63	0,63
	$h=3$	0,55	0,58	0,55	0,55	0,58	0,58	-	-	0,51	-	0,51	-	-	-	-	0,52	-	-

Tableau 1 : Quantité des IP disponibles, leur composition chimique α_{ci} et leur coefficient de réduction η_{ih}

Composant c	Caractéristiques de l'output $j=1$			Caractéristiques de l'output $j=2$		
	Valeur minimale	Valeur maximale	Valeur cible	Valeur minimale	Valeur maximale	Valeur cible
	β_{c1}^{Min}	β_{c1}^{Max}	δ_{c1}	β_{c2}^{Min}	β_{c2}^{Max}	δ_{c2}
$c=1$ (P ₂ O ₅)	65,0%	100%	66,6%	65,0%	66,0%	65,0%
$c=2$	0%	0,85%	0,85%	-	-	-
$c=3$	-	-	-	2,2%	3,9%	3,2%
$c=4$	0 mg/P ₂ O ₅	70 mg/P ₂ O ₅	65 mg/P ₂ O ₅	0,0018%	0,0025%	0,0025%

Tableau 2 : Caractéristiques chimiques des outputs étudiés

Laverie l	Quantité résidu (m ³)	Composant chimique du premier résidu			
		$c=1$	$c=2$	$c=3$	$c=4$
$l=1$	450	67,40%	0,54%	1,65%	0,0018%
$l=2$	250	68,52%	0,72%	1,55%	0,0017%
$l=3$	400	68,03%	0,56%	2,21%	0,0016%
$l=4$	337,5	66,35%	0,48%	2,56%	0,0025%
$l=5$	337,5	60,73%	0,31%	3,85%	0,0024%

Tableau 4 : Quantité du résidu par laverie et les caractéristiques chimiques du premier résidu

Volume total des commandes d'output (m ³)								
Output $j=1$	Output $j=2$	Output $j=1$	Output $j=1$					
22 000	18 000	23 000	22 000					
Commande élémentaire k								
$k=1$	$k=2$	$k=3$	$k=4$	$k=5$	$k=6$	$k=7$	$k=8$	
W_k (m ³)	9 000	13 000	9 000	9 000	9 000	14 000	9 000	13 000
$W_k \cdot \theta$ (tonne)	8 064	11 648	8 064	8 064	8 064	12 544	8 064	11 648

Tableau 3 : Commandes d'output à fabriquer et leur répartition en commandes élémentaires

		Commande élémentaire k								
		Output $j=1$		Output $j=2$		Output $j=1$		Output $j=1$		
		$k=1$	$k=2$	$k=3$	$k=4$	$k=5$	$k=6$	$k=7$	$k=8$	
Laverie l	$l=1$	Input primaire i	$s=2 / i=6$	$s=2 / i=6$	$s=2 / i=6$	$s=2 / i=6$	$s=1 / i=2$	$s=1 / i=2$	$s=1 / i=2$	$s=1 / i=2$
	Quantité prélevée (tonne)	3525	5091	2963	2963	2963	4609	2963	4280	
	Total par IP (tonne)	14542				14814				
	Gamme h utilisée	$h=3$	$h=3$	$h=1$	$h=1$	$h=1$	$h=1$	$h=1$	$h=1$	
	$l=2$	Input primaire i	$s=1 / i=1$	$s=1 / i=1$	$s=1 / i=1$	$s=1 / i=1$	$s=2 / i=5$	$s=2 / i=5$	$s=2 / i=5$	$s=2 / i=5$
	Quantité prélevée (tonne)	1958	2829	1958	1958	1803	2804	1803	2604	
	Total par IP (tonne)	8703				9014				
	Gamme h utilisée	$h=2$	$h=2$	$h=2$	$h=2$	$h=2$	$h=2$	$h=2$	$h=2$	
	$l=3$	Input primaire i	$s=3 / i=8$	$s=3 / i=8$	$s=3 / i=8$	$s=3 / i=8$	$s=4 / i=12$	$s=4 / i=12$	$s=4 / i=12$	$s=4 / i=12$
	Quantité prélevée (tonne)	2753	3977	2753	2753	2753	4283	2753	3977	
	Total par IP (tonne)	12237				13767				
	Gamme h utilisée	$h=2$	$h=2$	$h=2$	$h=2$	$h=2$	$h=2$	$h=2$	$h=2$	
	$l=4$	Input primaire i	$s=6 / i=18$	$s=6 / i=18$	$s=6 / i=18$	$s=6 / i=18$	$s=6 / i=17$	$s=6 / i=17$	$s=6 / i=17$	$s=6 / i=17$
	Quantité prélevée (tonne)	2160	3119	2160	2160	2160	3359	2160	3119	
	Total par IP (tonne)	9598				10798				
	Gamme h utilisée	$h=1$	$h=1$	$h=1$	$h=1$	$h=1$	$h=1$	$h=1$	$h=1$	
	$l=5$	Input primaire i	$s=5 / i=14$	$s=5 / i=14$	$s=5 / i=14$	$s=5 / i=13$	$s=5 / i=13$	$s=5 / i=13$	$s=5 / i=13$	$s=5 / i=13$
	Quantité prélevée (tonne)	2160	3119	2160	1966	1966	3058	1966	2839	
	Total par IP (tonne)	7439				11795				
	Gamme h utilisée	$h=1$	$h=1$	$h=1$	$h=1$	$h=1$	$h=1$	$h=1$	$h=1$	
Total des prélèvements pour la commande élémentaire k (tonnes)		12556	18136	11994	11800	11644	18114	11644	16820	

Tableau 5 : Quantités à prélever des IP et à traiter sur les laveries avec la gamme à opérer

Pour les trois commandes liées à l'output $j=1$, les mélanges ne sont pas identiques. En effet, pour les commandes élémentaires $k=1$ et $k=2$, la combinaison proposée par le modèle fait intervenir les IP $i=\{1, 6, 8, 14$ et $18\}$ traitées respectivement par les modes $h=\{1, 3, 2, 1, 1\}$; alors que pour les commandes élémentaires $k=4$ à $k=8$, le mélange proposé implique un prélèvement des IP $i=\{2, 5, 12, 13, 17\}$ traités respectivement par les gammes $h=\{1, 2, 2, 1, 1\}$. Cette différence s'explique par l'insuffisance des stocks des IP $i = \{2, 6\}$. Par ailleurs, on constate que le nombre maximal de changement d'IP par laverie est bien respecté (un seul changement permis pour la

fabrication de l'ensemble des commandes programmées). De plus, un seul changement de gamme a été proposé, qui est le passage du mode $h=3$ à $h=1$ sur la laverie $l=1$ entre les commandes élémentaires $k=2$ et $k=3$. Ce changement n'engendre pas de temps de lancement d'après la Figure 1.

Le modèle permet aussi de déterminer, pour chaque commande élémentaire, le volume à produire sur chaque laverie (en colonnes du Tableau 6) compte tenu des temps de changement s'ils ont lieu (variable intermédiaire), ainsi que la composition chimique en sortie de chaque laverie.

		Laverie					TOTAL
		l=1	l=2	l=3	l=4	l=5	
Commande élémentaire k=1	Volume total (m ³)	2282	1268	2028	1711	1711	9000
	Volume résiduel du lot k-1 (m ³)	450	250	400	337,5	337,5	1775
	Composant						
	c=1 (%)	70,43%	68,54%	64,79%	64,60%	63,92%	66,55%
	c=2 (%)	0,88%	0,81%	0,79%	0,66%	0,52%	0,74%
	c=3 (%)	1,32%	1,68%	2,50%	2,43%	2,81%	2,13%
c=4 (mg/P ₂ O ₅)	55,73	73,98	57,88	82,14	82,47	68,59	
Gamme	h=3	h=2	h=2	h=1	h=1		
		2282	1268	2028	1711	1711	9000
Commande élémentaire k=3	Volume total (m ³)	2282	1268	2028	1711	1711	9000
	Volume résiduel du lot k-1 (m ³)	450	250	400	337,5	337,5	1775
	Composant						
	c=1 (%)	67,04%	68,54%	63,99%	64,17%	64,70%	65,58%
	c=2 (%)	1,09%	0,84%	0,84%	0,70%	0,57%	0,83%
	c=3 (%)	1,91%	1,71%	2,57%	2,40%	2,55%	2,24%
c=4 (%)	0,0020%	0,0025%	0,0017%	0,0024%	0,0024%	0,0022%	
Gamme	h=1	h=2	h=1	h=1	h=1		
		2282	1268	2028	1711	1711	9000
Commande élémentaire k=5	Volume total (m ³)	2282	1268	2028	1711	1711	9000
	Volume résiduel du lot k-1 (m ³)	450	250	400	337,5	337,5	1775
	Composant						
	c=1 (%)	64,32%	68,51%	66,10%	63,75%	66,05%	65,53%
	c=2 (%)	0,78%	0,86%	1,03%	0,50%	0,87%	0,81%
	c=3 (%)	2,02%	1,50%	2,02%	2,76%	2,76%	2,23%
c=4 (mg/P ₂ O ₅)	71,00	59,70	55,57	76,29	80,64	68,65	
Gamme	h=1	h=2	h=1	h=1	h=1		
		2282	1268	2028	1711	1711	9000
Commande élémentaire k=7	Volume total (m ³)	2282	1268	2028	1711	1711	9000
	Volume résiduel du lot k-1 (m ³)	450	250	400	337,5	337,5	1775
	Composant						
	c=1 (%)	63,90%	68,50%	66,61%	63,65%	66,05%	65,52%
	c=2 (%)	0,70%	0,87%	1,07%	0,45%	0,87%	0,79%
	c=3 (%)	2,01%	1,45%	1,88%	2,85%	2,76%	2,20%
c=4 (mg/P ₂ O ₅)	71,47	54,93	54,63	74,77	80,64	67,53	
Gamme	h=1	h=2	h=1	h=1	h=1		

Tableau 6 : Composition chimique en sortie des laveries pour chaque commande élémentaire k

Les cellules en rouges indiquent un non-respect de la borne supérieure ou inférieure pour le composant du lot de l'II produit par la laverie en colonne. Sur les quarante lots d'II produits pour la fabrication des huit commandes élémentaires, seul un lot d'II respecte totalement les spécificités de tous les composants en sortie de la laverie l=5 pour la fabrication de la commande élémentaire k=4. Cela étant, par le mélange des flux provenant des cinq laveries, toutes les commandes élémentaires respectent bien les caractéristiques des outputs demandés (Tableau 3). Cette approche fournit alors une meilleure flexibilité au niveau des laveries tout en opérant au niveau de performance souhaité.

La fonction-objectif proposée agrège un coût lié à la composition du produit et un coût lié à la production. Ainsi, le modèle permet également de fournir des éléments de négociation aux deux maillons de la chaîne étudiée (le client qui est le complexe chimique et le fournisseur qui est le site minier). En modifiant le coût de la stabilité (fixé dans l'exemple numérique à $\sigma = 100$ pour tous les composants chimiques c , i.e. $\sigma_c = 100, \forall c \in C$) pour prendre successivement les valeurs $\{0, 10, 20, 50, 100, 500, 1000$ et $10000\}$, nous obtenons les différents coûts optimaux dans le Tableau 7.

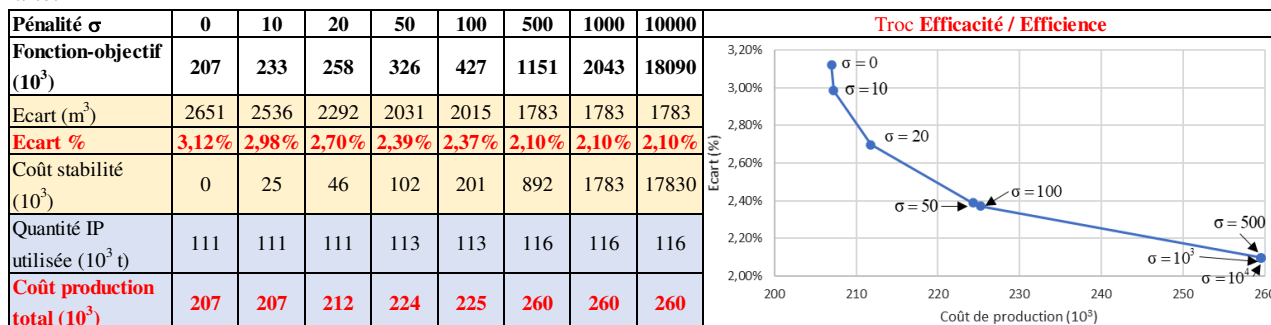


Tableau 7 : Coûts de la fonction-objectif en fonction du coût unitaire de stabilité de la composition

L'introduction d'une pénalité génère une baisse allant jusqu'à 33% de l'écart en m³ aux valeurs cibles par rapport à coût nul de stabilité pour $\sigma \geq 500$ (cette baisse étant de 24% pour $\sigma = 100$). Néanmoins, cette réduction de l'écart n'est possible que grâce à une augmentation de la quantité prélevée des IPs allant jusqu'à 4% (resp. 2%) par rapport à $\sigma = 0$ pour $\sigma \geq 500$ (resp. $\sigma = 100$), équivalent

à une augmentation du coût réel de production allant jusqu'à 25% (resp. 9%) par rapport à $\sigma = 0$ pour $\sigma \geq 500$ (resp. $\sigma = 100$). Cette illustration fournit ainsi les bases d'une négociation entre deux maillons d'une CL. En effet, la perte d'efficacité (augmentation du coût réel) en amont n'est acceptable à un niveau supérieur de supervision de la CL, qu'à condition que l'amélioration de l'efficacité

(ici amélioration de la qualité) en aval se traduit par des économies au moins égales.

3.3 Programme horaire de production

En plus des données de sortie présentées plus haut, le modèle permet de calculer la durée de production de chaque commande élémentaire, qui est identique pour toutes les laveries. Cette durée est calculée comme le quotient du volume de la commande élémentaire considérée par rapport à la somme des débits de production des laveries (voir première ligne du Tableau 8). Pour le lot $k=1$ par exemple, cette durée est de $9000 / 3550 = 2,54$ h. La première étape pour établir le programme horaire de production des laveries consiste à déterminer la date d'arrivée des commandes programmées à la ST. Pour ce faire, la date d'expédition de chaque commande d'output est retranchée de la durée de production de sa première commande élémentaire. Ainsi, connaissant la date d'expédition de chaque commande d'output (3^{ème} ligne du Tableau 8), on obtient leur date d'arrivée à la ST (dernière ligne du Tableau 8).

	Commande élémentaire k							
	Output $j=1$		Output $j=2$		Output $j=1$		Output $j=1$	
	$k=1$	$k=2$	$k=3$	$k=4$	$k=1$	$k=2$	$k=3$	$k=4$
Durée de production (heure)	2,54	3,66	2,54	2,54	2,54	3,94	2,54	3,66
TOTAL (heure)	6,20		5,07		6,48		6,20	
Date d'expédition de la commande d'output	6h00		12h15		17h15		23h45	
Date d'arrivée de la commande d'output à la ST	3h30		9h45		14h45		21h15	

Tableau 8 : Durée de production et date d'arrivée des commandes d'output à la ST

Pour établir le programme horaire de production des laveries, il faut déterminer les dates de lancement d'OF pour la fabrication des commandes d'output programmées. Pour que les flux des lignes arrivent tous à la ST à la même date, on retranche des dates d'arrivée à la ST, les durées de transport nécessaires pour acheminer les II produits par laveries à la ST (Tableau 9).

		Laverie l				
		$l=1$	$l=2$	$l=3$	$l=4$	$l=5$
Date de lancement	$k=1$	3h15	3h15	0H55	1h20	
d'OF pour les	$k=3$	9h30	9h30	7h10	7h35	
commandes	$k=5$	14h30	14h30	12h10	12h35	
d'output	$k=7$	21h00	21h00	18h40	19h05	

Tableau 9 : Date de lancement d'OF sur les laveries pour chaque commande d'output

Ainsi, connaissant les dates d'arrivée des lots élémentaires à la ST et les dates de lancement des OF d'IP sur les laveries, on peut schématiser les arrivées des lots à la ST (Gantt supérieur de la Figure 2) et les lancements d'ordres de fabrication sur les laveries (Gantt inférieure de la Figure 2). Comme expliqué précédemment, l'instauration d'un régime permanent nécessite une demi-heure environ lors de l'introduction d'un nouvel IP, c'est bien ce résidu qui arrive en premier à 3h30 pour $k=1$, suivi une demi-heure après de l'II choisi par le modèle. Les dates de lancements d'OF sur le Gantt inférieure sont décalées d'après le Tableau 9, pour tenir compte des durées de transport par pipelines secondaires à la ST.

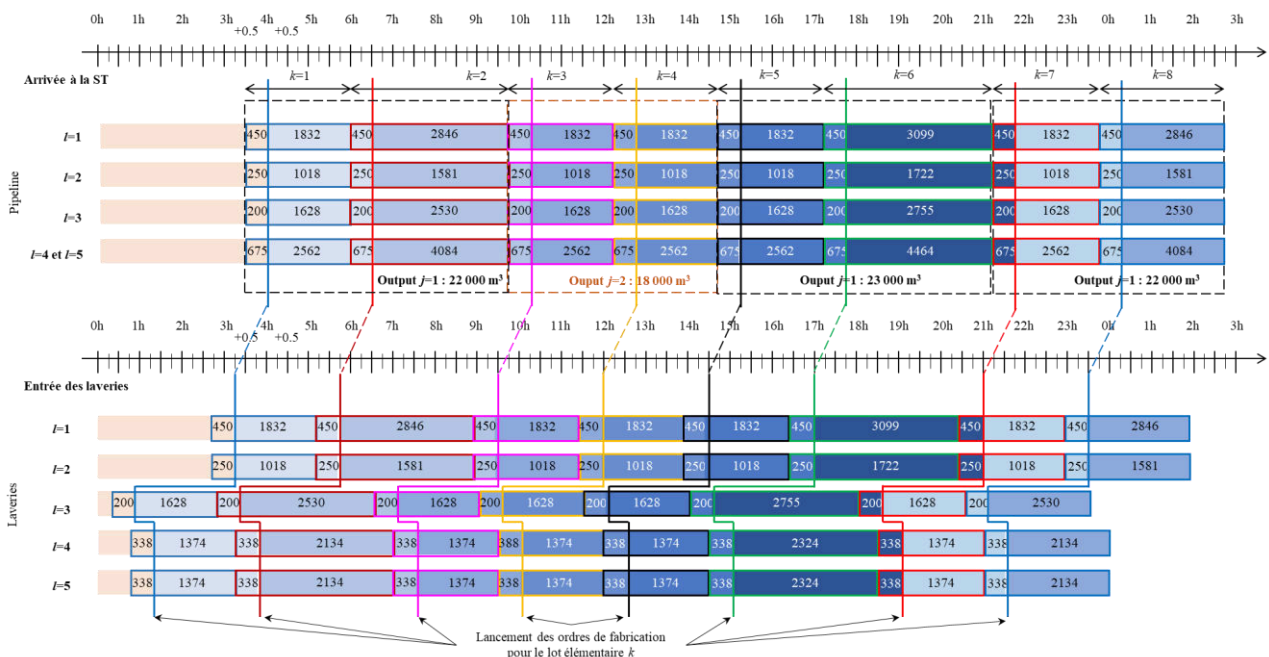


Figure 2 : Programme d'arrivée aux bacs de stockage et programme de production d'OF sur les laveries

4 CONCLUSION

Dans ce papier, nous avons étudié un cas original du problème de blending appliqué à une Chaîne Logistique minière, dont la mission est de satisfaire un carnet de commandes de produits finis (Output) sur un horizon glissant sur une à deux journées. Une commande d'output est constituée dans des bacs de réception en mélangeant 5 lots de produits intermédiaires (Input Intermédiaire (II)) provenant de manière synchronisée de 5 laveries opérant suivant un flux continu. Ces laveries ne pouvant être alimentées que par un seul minerai (Input primaire (IP)) parmi un ensemble disponible en amont. Le passage en laverie d'un IP implique une modification de sa quantité et qualité pour obtenir un II suivant trois gammes possibles, mutuellement exclusives. L'état initial des laveries est pris en compte dans la modélisation, aboutissant à un modèle mathématique quadratique en nombre entier. Cette formulation permet d'obtenir un programme de production des

laveries déterminant les quantités d'II à mélanger pour chaque commande d'output. De plus, le modèle fournit des bases de négociation entre deux maillons de la CL (fournisseur/client) en s'appuyant sur des coûts fictifs (pour des raisons de confidentialité).

REFERENCES

- Azzamouri, A., M. Bamoumen, H. Hilali, V. Hovelaque, V. Giard. 2020. "Flexibility of dynamic blending with alternative routings combined with security stocks: a new approach in a mining supply chain", *International Journal of operation research*, DOI: 10.1080/00207543.2020.1814443