LABORATOIRED'ANALYSE
ET MODÉLISATIONDE
SYSTÈMES POURL'AIDE À
LA DÉCISION ■ UNITÉ DE
ECHERCHEASSOCIÉECNRS
UMR
7024 ■ UNIVERSITÉPARIS
DAUPHINEPLACE DU M[al] DE
LATTRE DE
TASSIGNYF-75775
PARISCEDEX
16 ■ TÉLÉPHONE (33 1)(01)
44 05 44 66TÉLÉCOPIE(33
1)(01) 44 05 40 91 ■ E-MAIL
ro-
he@lamsade.dauphine.frWE
B
www.lamsade.dauphine.fr ■

UNIVERSITE PARIS DAUPHINE

■

# Robustesse et dualité en programmation linéaire

NOTE N° 41
avril 2008

Virginie GABREL, Cécile MURAT (1)

(1) CNRS- LAMSADE, Université Paris-Dauphine, Place du Maréchal De Lattre de Tassigny, 75775 Paris Cedex 16.

# Robustesse et dualité en programmation linéaire

April 17, 2008

**Virginie Gabrel and Cécile Murat**
Université Paris-Dauphine, LAMSADE, F-75016 Paris, France
CNRS, UMR7024,F-75016 Paris, France
E-mail: gabrel,murat@lamsade.dauphine.fr

**Abstract**

Dans cet article, nous étudions un programme linéaire dans lequel les valeurs des second membres des contraintes sont entachées d'incertitude et d'indétermination. Cette incertitude est modélisée par un intervalle, c'est-à-dire que le second membre de chaque contrainte peut prendre une valeur quelconque dans un intervalle indépendamment des autres contraintes. Dans la littérature, les programmes linéaires, dont les coefficients des variables dans la fonction objectif sont incertains et approchés par un intervalle, ont été largement étudiés. Il s'agit alors de déterminer une solution qui résiste au mieux aux incertitudes, une telle solution étant qualifiée de robuste. Pour cela, les critères classiques du pire cas et du regret maximum sont appliqués pour définir différentes versions robustes du programme linéaire de départ. Des modèles de robustesse plus récents, généralisant le critère du pire cas (dû à Bertsimas et Sim), ont également été proposés. Le sujet de ce papier est d'établir des correspondances entre programmes linéaires avec second membres incertains et programmes linéaires avec coefficients incertains dans la fonction objectif en utilisant la dualité classique. Nous montrons que le tranfert de l'incertitude des second membres des contraintes vers les coefficients de la fonction objectif est possible en établissant des nouvelles relations de dualité entre différentes versions robustes. Lorsque les second membres des contraintes sont approchés par des intervalles, nous proposons également une extension du modèle de Bertsimas et Sim et montrons que le critère du regret maximum est équivalent au critère du pire cas.

**Mots Clefs**: programmation linéaire, second membre incertain, robustesse, critère du pire cas, critère du regret maximum.

**Abstract**

In this article, we consider a linear program in which the right hand sides of the constraints are uncertain and inaccurate. This uncertainty is represented by intervals, that is to say that each right hand side can take any value in its interval regardless of other constraints. In the literature, linear programs with uncertain objective function coefficients have been widely studied. The problem is then to determine a robust solution which is satisfactory for all possible coefficient values. Classical criteria like the worst case and the maximum regret are applied to define different robust versions of the initial linear program. More recently, Bertsimas and Sim have proposed a new model which generalizes the worst case criterion. The subject of this paper is to establish the relationships between linear programs with uncertain right hand sides and linear programs with uncertain objective function coefficients using the classical duality theory. We show that the transfer of the uncertainty from the right hand sides to the objective function coefficients is possible by establishing new dual relationships. When the right hand sides are approximated by intervals, we also propose an extension of the Bertsimas and Sim's model and we show that the maximum regret criterion is equivalent to the worst case criterion.

**Keywords**: linear programming, interval right hand side, robustness analysis, worst case criteria, maximum regret criteria.

# 1 Introduction et motivations

Dans un programme mathématique modélisant un problème de décision réel, un certain nombre de paramètres est souvent entaché d'incertitude et d'indétermination. Cette incertitude peut être de nature différente (erreurs de calcul, phénomènes aléatoires, avenir incertain...) et se représente par différents modèles : scénarios, loi de probabilités, intervalles, nombres flous... La difficulté provient alors du fait qu'il n'existe, le plus souvent, pas de solution qui soit optimale pour tous les jeux de paramètres à considérer. Lorsque le modèle d'incertitude est un modèle probabiliste, la solution recherchée est en général une solution qui optimise un critère du type espérance mathématique. En l'absence de lois de probabilité, l'objectif est alors de déterminer une solution qui soit relativement bonne quel que soit le jeux de paramètres qui puisse se réaliser, une telle solution étant qualifiée de robuste. Dans ce cadre, un certain nombre de travaux s'attache à définir ce concept de solution robuste et à introduire des critères de robustesse, par exemple [2, 4, 7, 11, 12, 13].

Dans cet article, nous nous intéressons à deux critères communément utilisés en optimisation robuste : le critère du pire cas et celui du regret maximum. Nous considérons que le problème de décision est modélisé sous la forme d'un programme linéaire de la forme :

$$(P)\left\{\begin{array}{rl} \min & cx \\ s.t & Ax \geq b \\ & x \geq 0 \end{array}\right.$$

comportant $n$ variables $x_j$ et $m$ contraintes. Dans ce modèle, l'incertitude peut porter sur tout ou partie des paramètres exogènes : les coefficients de la fonction objectif $c$, les coefficients de la matrice des contraintes $A$ et/ou les second membres $b$. Nous supposerons que le modèle d'incertitude est un modèle par intervalle, c'est-à-dire qu'un coefficient incertain $\alpha$ est représenté par un intervalle de valeur $[\overline{\alpha} - \widehat{\alpha}, \overline{\alpha} + \widehat{\alpha}]$ centré sur $\overline{\alpha}$, considérée comme une valeur nominale. Un scénario est la spécification d'une unique valeur de l'intervalle pour chaque coefficient incertain, indépendamment les uns des autres.

Dans ce cadre, un grand nombre de résultats ont déjà été obtenus lorsque l'incertitude porte sur chacun des coefficients de la fonction objectif [1, 6, 8, 9]. La recherche d'une solution robuste selon le critère du pire cas reste alors un programme linéaire facile à résoudre. Par contre, Averback et Lebedev montrent dans [1] que la recherche d'une solution robuste selon le critère du regret maximum est NP-difficile. Un certain nombre de méthodes exactes et approchées avaient déjà été proposées dans [6, 8, 9] pour résoudre la version robuste d'un programme linéaire au sens du regret maximum.
Le cas d'incertitude sur les coefficients de la matrice des contraintes a également donné lieu à quelques travaux dont [5, 12]. Il s'agit le plus souvent de déterminer une solution réalisable dans tous les scénarios possibles, analyse analogue à celle du pire cas. Plus récemment, Bertsimas et Sim, jugeant le critère du pire cas trop conservateur, ont proposé un nouveau modèle de robustesse permettant de le nuancer [3, 4] tout en conservant la polynomialité de la version robuste. Le

cas d'incertitude sur les second membres des contraintes uniquement a été très peu étudié spécifiquement. Minoux, dans [10], s'intéresse à ce cas et justifie son analyse spécifique en remettant en cause l'existence de relations de dualité classique dans l'analyse des programmes linéaires robustes.

Notre objectif, dans cet article, est de considérer le cas d'incertitude sur les second membres des contraintes uniquement, d'appliquer successivement le critère du pire cas et le modèle de Berstimas et Sim (vu comme une généralisation du critère du pire cas) et de s'attacher, par le biais de la dualité, à transférer l'incertitude sur les coefficients de la fonction objectif afin de bénéficier des nombreux résultats déjà obtenus dans ce contexte. Nous analysons donc différentes versions robustes du programme linéaire initial et, pour chaque version, nous étudions précisément le programme dual. Nous constatons alors, comme Minoux dans [10], que le programme dual de la version robuste du PL initial ne correspond pas à la version robuste du PL dual dans lequel l'incertitude porte sur les coefficients de la fonction objectif. Cependant, nous montrons que, dans le programme dual de la version robuste, le critère de robustesse a également (et logiquement) été dualisé. En conséquence, si on prend le soin de dualiser le critère de robustesse, pire cas (généralisé) versus meilleur cas (généralisé), la théorie de la dualité s'applique et permet le transfert de l'incertitude des second membres vers les coefficents de la fonction objectif. Considérant le modèle de Bertsimas et Sim, ces nouvelles relations de dualité nous amènent à proposer une variante originale du modèle, bien plus pertinente en termes de robustesse d'une solution. Nous terminons par l'analyse du critère du regret maximum pour constater que, dans le cas d'incertitude sur les second membres des contraintes, la version robuste selon ce critère est équivalente à la version robuste selon le critère du pire cas.

Dans la prochaine section, nous présentons la version robuste selon le critère du pire cas d'un programme linéaire dans lequel l'incertitude porte sur les coefficients de la fonction objectif, puis d'un programme linéaire dans lequel l'incertitude porte sur les second membres des contraintes. Dans chacun des cas, nous introduisons le critère inverse, appelé le critère du meilleur cas, qui nous sera utile pour établir les relations de dualité entre les différentes versions à la fin de la section 2. Dans la section 3, nous nous focalisons sur le modèle de Bertsimas et Sim que nous présentons comme une généralisation du critère du pire cas. Après avoir présenté la version robuste de ce modèle, nous introduisons une généralisation du critère du meilleur cas afin d'établir de nouvelles relations de dualité. Nous terminons en section 4 par l'analyse du critère du regret maximum.

# 2 La robustesse selon le critère du pire cas

On considère le programme linéaire $(P)$ suivant :

$$(P)\left\{\begin{array}{rl}\min & cx \\ s.t & Ax \geq b \\ & x \geq 0\end{array}\right.$$

comportant $n$ variables $x_j$ et $m$ contraintes. On suppose que $(P)$ admet un ensemble non vide de solutions et un optimum borné. Par la suite, on note $v(P)$ la valeur de la solution optimale de $P$.

## 2.1 Incertitude sur les coefficients de la fonction objectif

Dans le problème $(P)$, on suppose que l'incertitude porte sur les coefficients de la fonction objectif avec, pour tout $j = 1, \ldots, n$, $\overline{c}_j - \widehat{c}_j \leq c_j \leq \overline{c}_j + \widehat{c}_j$ et $\widehat{c}_j \geq 0$.

### 2.1.1 Le critère du pire cas

Appliquer le critère du pire cas revient à évaluer une solution $x$ en retenant le scénario qui lui sera le plus défavorable, soit :

$$f_{wor}(x) = \max_{\overline{c}-\widehat{c} \leq c \leq \overline{c}+\widehat{c}} cx$$

Cette valeur $f_{wor}(x)$ constitue une garantie absolue sur la valeur de $x$ puisque quel que soit le scénario qui se réalisera, la valeur de $x$ sera inférieure ou égale à $f_{wor}(x)$. C'est en ce sens que $f_{wor}(x)$ constitue une mesure de robustesse.

Rechercher une solution optimisant le critère du pire cas lorsque l'incertitude porte sur les coefficients de la fonction objectif, revient à résoudre le problème noté $(P_W^{obj})$ dans lequel il s'agit de déterminer, parmi toutes les solutions $x$ réalisables, celle qui minimise $f_{wor}(x)$, soit :

$$v(P_W^{obj}) = \min_{\substack{Ax \geq b \\ x \geq 0}} \max_{\overline{c}-\widehat{c} \leq c \leq \overline{c}+\widehat{c}} cx$$

Or, comme $x \geq 0$, le scénario du pire cas correspond à $c = \overline{c} + \widehat{c}$. Par conséquent,

$$v(P_W^{obj}) = \min_{\substack{Ax \geq b \\ x \geq 0}} (\overline{c} + \widehat{c})x$$

qui n'est autre que le programme linéaire initial dans lequel les coefficients de la fonction objectif sont à leur plus grande valeur.

**Remarque 1** *Même si l'on ne fait pas l'hypothèse des $x \geq 0$, en passant par la dualité, on retrouve un programme linéaire pour définir le problème du pire cas. En effet, pour un $x$ fixé le problème*

$$\begin{cases} \max & cx \\ s.t & c \leq \overline{c} + \widehat{c} \\ & -c \leq -(\overline{c} - \widehat{c}) \end{cases}$$

*admet une solution optimale finie dont la valeur est égale à celle du dual, à savoir :*

$$\begin{cases} \min & (\overline{c} + \widehat{c})u - (\overline{c} - \widehat{c})l \\ s.t & u - l = x \\ & u, l \geq 0 \end{cases}$$

*On peut réexprimer le problème du pire cas de la façon suivante :*

$$v(P_W^{obj}) = \min_{Ax \geq b} \min_{\substack{u-l=x \\ u,l \geq 0}} ((\overline{c} + \widehat{c})u - (\overline{c} - \widehat{c})l)$$

*Ce qui est équivalent au programme linéaire :*

$$(P_W^{obj}) \begin{cases} \min & (\overline{c} + \widehat{c})u - (\overline{c} - \widehat{c})l \\ s.t & Ax \geq b \\ & u - l = x \\ & u, l \geq 0 \end{cases}$$

*On notera que si l'on remplace $u$ par son expression en fonction de $x$ et $l$ on obtient :*

$$(P_W^{obj}) \begin{cases} \min & (\overline{c} + \widehat{c})x + 2\widehat{c}l \\ s.t & Ax \geq b \\ & x + l \geq 0 \\ & l \geq 0 \end{cases}$$

*Dans le cas particulier où $x \geq 0$, on aura $l = 0$ à l'optimum et on retrouve naturellement le scénario du pire cas.*

$(P_W^{obj})$ est la version robuste de $(P)$ lorsque le critère du pire cas est considéré. A l'inverse du critère du pire cas, on peut s'intéresser au critère du meilleur cas qui, s'il s'avère peu pertinent en terme de robustesse d'une solution, permet cependant de déterminer la meilleure solution atteignable, et donc, de mesurer la "distance" entre le pire et le meilleur cas.

### 2.1.2 Le critère du meilleur cas

Appliquer le critère du meilleur cas revient à évaluer une solution $x$ en retenant le scénario qui lui sera le plus favorable, soit :

$$f_{bes}(x) = \min_{\overline{c}-\widehat{c}\leq c\leq\overline{c}+\widehat{c}} cx$$

Rechercher une solution optimisant le critère du meilleur cas lorsque l'incertitude porte sur les coefficients de la fonction objectif, revient à résoudre le problème noté $(P_B^{obj})$ dans lequel il s'agit de déterminer, parmi toutes les solutions $x$ réalisables celle qui minimise $f_{bes}(x)$, soit :

$$v(P_B^{obj}) = \min_{\substack{Ax\geq b\\ x\geq 0}} \min_{\overline{c}-\widehat{c}\leq c\leq\overline{c}+\widehat{c}} cx$$

Or, comme $x \geq 0$, le scénario du meilleur cas correspond à $c = \overline{c} - \widehat{c}$. Par conséquent,

$$v(P_B^{obj}) = \min_{\substack{Ax\geq b\\ x\geq 0}} (\overline{c} - \widehat{c})x$$

qui n'est autre que le programme linéaire initial dans lequel les coefficients de la fonction objectif sont à leur plus petite valeur.

**Remarque 2** *Si l'on ne fait pas l'hypothèse des $x \geq 0$, le problème du meilleur cas revient au problème quadratique ci-dessous :*

$$(P_B^{obj}) \begin{cases} \min & cx \\ s.t & Ax \geq b \\ & c \leq \overline{c} + \widehat{c} \\ & -c \leq -(\overline{c} - \widehat{c}) \end{cases}$$

On peut montrer que le problème $(P_B^{obj})$ est NP-difficile en utilisant le résultat d'Averback et Lebedev dans [1] qui établit que le problème ci-dessous est NP-difficile pour un $z$ donné :

$$(R) \begin{cases} \max & (cz - cy) \\ s.t & Ay \geq a \\ & c \leq \overline{c} + \widehat{c} \\ & -c \leq -(\overline{c} - \widehat{c}) \end{cases}$$

En effet, si on pose $x = y - z$, le problème $R$ s'écrit :

$$(R) \begin{cases} \max & -cx \\ s.t & Ax \geq a - Az \\ & c \leq \overline{c} + \widehat{c} \\ & -c \leq -(\overline{c} - \widehat{c}) \end{cases}$$

Pour un $z$ fixé, si on pose $b = a - Az$, on a $v(P_B^{obj}) = -v(R)$ et les deux problèmes présentent la même complexité.

## 2.2 Incertitude sur les second membres des contraintes

Dans le problème $(P)$, on suppose que l'incertitude porte maintenant sur les second membres des contraintes, soit, pour tout $i = 1, \ldots, m$, $\overline{b}_i - \widehat{b}_i \leq b_i \leq \overline{b}_i + \widehat{b}_i$ avec $\widehat{b}_i \geq 0$ .

### 2.2.1 Le critère du pire cas

L'incertitude porte maintenant sur la réalisabilité même d'une solution. Un scénario $b$ est défavorable à une solution $x$ lorsque $x$ n'appartient pas à l'ensemble des solutions réalisables défini par : $X^b = \{x \in \mathbb{R}^n : Ax \geq b, x \geq 0\}$. Aussi, pour une solution $x$ donnée, deux cas de figure sont à considérer :

- soit $x$ est réalisable pour tous les scénarios, autrement dit pour toutes les valeurs possibles de $b$ et dans ce cas, $f_{wor}(x) = cx$ indépendament de la valeur de $b$,

- soit il existe au moins une valeur de $b$ pour laquelle $x$ n'est pas réalisable et, dans ce cas, $f_{wor}(x) = +\infty$.

Comme on cherche à minimiser $f_{wor}(x)$, les solutions qui ont pour évaluation $+\infty$ ne pourront être optimales, et la solution optimale se trouve donc parmi celles qui sont réalisables sur tous les scénarios. Compte tenu de la forme des contraintes, l'ensemble des solutions réalisables sur tous les scénarios est $\{x \geq 0 : Ax \geq \overline{b} + \widehat{b}\}$. Par conséquent, rechercher une solution optimisant le critère du pire cas lorsque l'incertitude porte sur les second membres des contraintes, revient à résoudre le programme linéaire, noté $(P_W^{rhs})$, suivant :

$$(P_W^{rhs}) \begin{cases} \min & cx \\ s.t & Ax \geq \overline{b} + \widehat{b} \\ & x \geq 0 \end{cases}$$

**Exemple 1** *Considérons le programme linéaire suivant :*

$$(P)\begin{cases} \min & 4x_1 + x_2 \\ s.t & x_1 + 2x_2 \geq b_1 \\ & x_1 - x_2 \geq b_2 \\ & x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

*avec l'incertitude portant sur les second membres des contraintes :* $b_1 \in [1, 5]$ *qui correspond à* $\overline{b}_1 = 3$ *et* $\widehat{b}_1 = 2$*, et* $b_2 \in [-2, 4]$ *qui correspond à* $\overline{b}_2 = 1$ *et* $\widehat{b}_2 = 3$*. En utilisant le critère du pire cas, la version robuste du problème* $(P)$ *est donc :*

$$(P_W^{rhs})\begin{cases} \min & 4x_1 + x_2 \\ s.t & x_1 + 2x_2 \geq 5 \\ & x_1 - x_2 \geq 4 \\ & x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

*qui admet comme solution optimale :* $x_1^W = 13/3$ *et* $x_2^W = 1/3$ *de valeur* $v(P_W^{rhs}) = 53/3 = 17,667$*. Nous remarquons, sur la figure 1, que cette solution est réalisable quel que soit le scénario* $(b_1, b_2)$ *se réalisant. Par contre, elle a un coût important, puisque la valeur de la solution* $x_1^N = 5/3$ *et* $x_2^N = 2/3$ *du problème nominal (dans lequel* $b_1 = \overline{b}_1$ *et* $b_2 = \overline{b}_2$*) est de* $22/3$*, alors que la solution robuste au sens du critère du pire cas, a pour valeur* $53/3$*.*

La solution optimale de $(P_W^{rhs})$ est jugée robuste dans le sens où elle est réalisable quel que soit le scénario pouvant se réaliser. En contrepartie, elle risque d'être beaucoup plus mauvaise que la meilleure solution atteignable (sur au moins un scénario). Et afin de mesurer cette détérioration, on peut utiliser le critère du meilleur cas.

### 2.2.2 Le critère du meilleur cas

Cette fois, pour toute solution $x$ réalisable sur au moins un scénario $b$ dans $[\overline{b} - \widehat{b}, \overline{b} + \widehat{b}]$, sa meilleure valeur sera $cx$ car :

$$f_{bes}(x) = \min(cx, +\infty) = cx$$

Il faut donc chercher la solution optimale sur l'union des ensembles de solutions réalisables définie par : $\{x \geq 0 : Ax \geq \overline{b} - \widehat{b}\}$. Par conséquent, le problème du

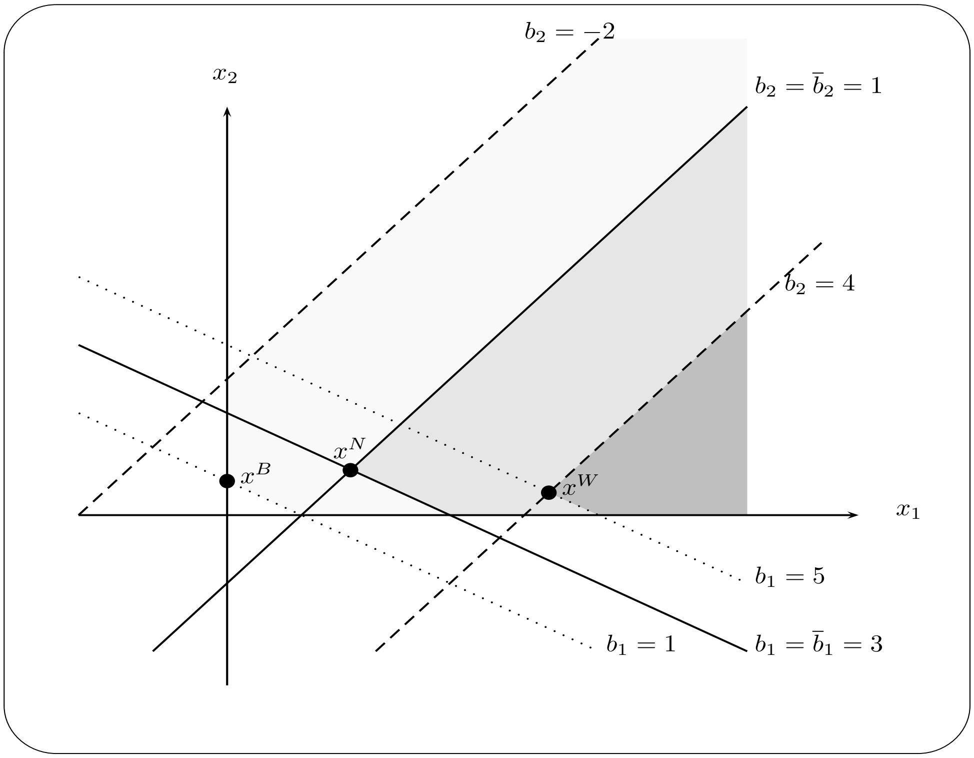


Figure 1: Les différents scénarios

meilleur cas avec incertitude sur les second membres des contraintes, noté $(P_B^{rhs})$, est le programme linéaire :

$$(P_B^{rhs}) \left\{ \begin{array}{rl} \min & cx \\ s.t & Ax \geq \overline{b} - \widehat{b} \\ & x \geq 0 \end{array} \right.$$

**Exemple 2** *Reprenons le programme linéaire de l'exemple 1. Si l'on applique le critère du meilleur cas, le problème à résoudre est :*

$$(P_B^{rhs}) \left\{ \begin{array}{rl} \min & 4x_1 + x_2 \\ s.t & x_1 + 2x_2 \geq 1 \\ & x_1 - x_2 \geq -2 \\ & x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{array} \right.$$

*qui admet comme solution optimale :* $x_1^B = 0$ *et* $x_2^B = 1/2$ *de valeur* $v(P_B^{rhs}) = 1/2$*. Cette valeur est la meilleure valeur atteignable considérant l'ensemble des* *scénarios pouvant se réaliser. Ainsi, la valeur de toute solution optimale est comprise dans l'intervalle* $[1/2, 53/3]$.

Lorsque l'incertitude porte sur les second membres, il semble naturel de passer au problème dual pour retrouver l'incertitude sur les coefficients de la fonction objectif et les problèmes de robustesse associés. C'est ce que nous nous attachons à faire dans la section suivante.

## 2.3 Relations de dualité

Partant du problème $(P)$ initial avec incertitude sur les second membres des contraintes, son dual, noté $(D)$, est :

$$(D) \left\{ \begin{array}{rl} \max & b^t y \\ s.t & A^t y \leq c^t \\ & y \geq 0 \end{array} \right.$$

Dans $(D)$ l'incertitude porte donc sur les coefficients de la fonction objectif, et si l'on applique le critère du pire cas on doit résoudre le problème :

$$v(D_W^{obj}) = \max_{\substack{A^t y \leq c^t \\ y \geq 0}} \min_{\bar{b} - \hat{b} \leq b \leq \bar{b} + \hat{b}} b^t y = \max_{\substack{A^t y \leq c^t \\ y \geq 0}} (\bar{b}^t - \hat{b}^t) y$$

Afin d'interpréter cette valeur sur le problème de départ, écrivons le dual du dernier programme linéaire :

$$v(D_W^{obj}) = \min_{\substack{Ax \geq \bar{b} - \hat{b} \\ x \geq 0}} cx$$

Or, on ne retrouve pas $(P_W^{rhs})$ comme attendu mais $(P_B^{rhs})$. En conséquence, optimiser selon le critère du pire cas un programme linéaire dans lequel les incertitudes portent sur les second membres ne revient pas à optimiser selon le même critère son programme dual dans lequel l'incertitude porte sur les coefficients de la fonction objectif. Plus exactement, on a "dualisé" le critère : du pire cas vers le meilleur cas. On doit donc appliquer le critère "dual" sur le problème dual. De ce qui précède, nous en déduisons les relations suivantes :

$$v(P_B^{rhs}) = v(D_W^{obj}) \leq v(D) = v(P)$$

De la même façon, appliquer le critère du meilleur cas sur $(D)$ revient à appliquer le critère du pire cas sur $(P)$, soit :

$$v(D_B^{obj}) = \max_{\substack{A^t y \leq c^t \\ y \geq 0}} \max_{\bar{b}-\widehat{b} \leq b \leq \bar{b}+\widehat{b}} b^t y = \max_{\substack{A^t y \leq c^t \\ y \geq 0}} (\bar{b}^t + \widehat{b}^t) y = \min_{\substack{Ax \geq \bar{b}+\widehat{b} \\ x \geq 0}} cx = v(P_W^{rhs})$$

On a donc, cette fois :

$$v(D) = v(P) \leq v(P_W^{rhs}) = v(D_B^{obj})$$

En conclusion, si l'on souhaite transférer la prise en compte de l'incertitude des second membres vers la fonction objectif (ou inversement), on se doit d'appliquer le critère "dual" sur le programme linéaire dual.

Plus récemment, Bertsimas et Sim ont proposé un modèle de robustesse qui reste polynomial tout en fournissant des solutions plus nuancées en terme de robustesse : ces solutions ne sont pas évaluées au regard du pire scénario dont les auteurs considèrent qu'il a très peu de chance de se réaliser. Ce nouveau modèle peut s'interpréter comme une généralisation du pire cas et, dans la section suivante, nous nous attachons à généraliser les relations de dualité établies précédemment.

# 3 La robustesse selon Bertsimas et Sim

## 3.1 L'approche de Bertsimas et Sim pour les coefficients de la fonction objectif

Dans le problème $(P)$ ci-dessous, on suppose que l'incertitude porte sur les coefficients de la fonction objectif, soit pour tout $j = 1, \ldots, n$, $\bar{c}_j - \widehat{c}_j \leq c_j \leq \bar{c}_j + \widehat{c}_j$, avec $\widehat{c}_j \geq 0$.

$$(P) \begin{cases} \min & cx \\ s.t & Ax \geq b \\ & x \geq 0 \end{cases}$$

Bertsimas et Sim dans [4] considèrent que, pour tout $j = 1, \ldots, n$, $\bar{c}_j$ constitue une valeur nominale dont on risque de s'éloigner du fait des incertitudes. Considérer le critère du pire cas revient à décider dans un contexte où tous les paramètres vont simultanément dévier vers leur pire valeur. L'approche de Bertsimas et Sim part du principe que les paramètres ne devraient pas tous dévier simultanément dans le mauvais sens : seul un sous-ensemble de paramètres, de cardinalité maximale $\Gamma_0$ (avec $\Gamma_0 \leq n$), risque d'être modifié dans le pire des cas (sans que ce sous-ensemble ne soit fixé a priori). Leur approche peut donc s'interpréter comme une généralisation du critère du pire cas (que l'on retrouve lorsque $\Gamma_0 = n$). Dans la version robuste selon Bertsimas et Sim, il s'agit de déterminer le sous-ensemble de paramètres dont la perturbation détèriorera le plus la valeur d'une solution. Pour le problème $(P)$ considéré, cela revient à calculer la plus forte augmentation de la valeur d'une solution sachant qu'au plus $\Gamma_0$ coefficients de la fonction objectif vont dévier de leur valeur nominale $\overline{c}$. On représente la déviation de $c_j$ en introduisant une variable $z_j$ définie par $c_j = \overline{c}_j + z_j\widehat{c}_j$ avec $-1 \leq z_j \leq 1$. Selon Bertsimas et Sim, la version robuste du programme linéaire $(P)$, notée $(P_{WG}^{obj})$, se définit comme suit :

$$v(P_{WG}^{obj}) = \min_{\substack{Ax \geq b \\ x \geq 0}} \left( \overline{c}x + \max_{\substack{\sum_{j=1}^{n} |z_j| \leq \Gamma_0 \\ -1 \leq z_j \leq 1}} z\widehat{C}x \right)$$

où $z = (z_i)_{i=1,\ldots,n}$ est un vecteur ligne et $\widehat{C}$ est une matrice diagonale dont les termes diagonaux sont les $\widehat{c}_i$. Pour un $x \geq 0$ fixé, une déviation qui détériore la fonction objectif est telle que $z_j \geq 0$ et par conséquent, nous pouvons réécrire le problème de la façon suivante :

$$v(P_{WG}^{obj}) = \min_{\substack{Ax \geq b \\ x \geq 0}} \left( \overline{c}x + \max_{\substack{\sum_{j=1}^{n} z_j \leq \Gamma_0 \\ 0 \leq z_j \leq 1}} z\widehat{C}x \right)$$

Pour un $x$ fixé, l'ensemble des solutions réalisables sur les variables $z$ étant borné et non vide, d'après la théorie de la dualité, nous obtenons :

$$v(P_{WG}^{obj}) = \min_{\substack{Ax \geq b \\ x \geq 0}} \left( \overline{c}x + \min_{\substack{\lambda + \mu_j \geq \widehat{c}_j x_j, \forall j = 1,\ldots,n \\ \lambda, \mu_j \geq 0}} \left( \Gamma_0 \lambda + \sum_{j=1}^{n} \mu_j \right) \right)$$

ce qui est équivalent au programme linéaire suivant :

$$(P_{WG}^{obj}) \begin{cases} \min & \overline{c}x + \Gamma_0\lambda + \sum_{j=1}^{n} \mu_j \\ s.t & Ax \geq b \\ & \lambda + \mu_j \geq \widehat{c}_j x_j, \forall j = 1, \ldots, n \\ & x \geq 0 \\ & \lambda, \mu_j \geq 0 \end{cases}$$

La solution optimale de $(P^{obj}_{WG})$ est robuste au sens de Bertsimas et Sim dans la mesure où, même si au plus $\Gamma_0$ coefficients de la fonction objectif dévient de leur valeur nominal (et atteignent leur plus grande valeur),la valeur de cette solution sera nécessairement inférieure ou égale à $v(P^{obj}_{WG})$ : en ce sens, $v(P^{obj}_{WG})$ offre une garantie absolue pour un budget $\Gamma_0$ fixé. De plus, nous avons la relation suivante :

$$v(P^{obj}_{WG}(\Gamma_0)) \leq v(P^{obj}_{WG}(\Gamma_0 + 1))$$

L'approche préconisée par Bertsimas et Sim consiste à se prémunir contre une détérioration éventuelle des paramètres, et donc, à nuancer et généraliser le critère du pire cas. Si l'on souhaite cette fois généraliser le meilleur cas dans le même esprit, on arrive au problème noté $(P^{obj}_{BG})$ suivant :

$$v(P^{obj}_{BG}) = \min_{\substack{Ax \geq b \\ x \geq 0}} \left( \overline{c}x - \max_{\substack{\sum_{j=1}^{n} z_j \leq \Gamma_0 \\ 0 \leq z_j \leq 1}} z\widehat{C}x \right)$$

Ce qui est équivalent au programme quadratique suivant :

$$(P^{obj}_{BG}) \begin{cases} \min & \overline{c}x - z\widehat{C}x \\ s.t & Ax \geq b \\ & \sum_{j=1}^{n} z_j \leq \Gamma_0 \\ & x \geq 0 \\ & 0 \leq z_j \leq 1 \end{cases}$$

On remarque que si $\Gamma_0 = n$, toutes les variables $z_i$ valent 1 à l'optimum car $x \geq 0$ et on retrouve le problème du meilleur cas $(P^{obj}_{B})$ facile à résoudre car linéaire. Par contre, pour un $\Gamma_0 \in ]0, n[$ quelconque le problème devient difficile car il revient à minimiser une fonction quadratique concave.

Globalement, nous pouvons distinguer 3 cas :

- $\Gamma_0 = 0$ correspond à une situation où on s'interdit la prise en compte de l'incertitude, les coefficients des variables sont donc chacun à leur valeur nominale et de façon évidente $v(P^{obj}_{WG}) = v(P^{obj}_{BG})$,
- $\Gamma_0 = n$, comme on l'a vu précédemment $v(P^{obj}_{WG}) = v(P^{obj}_{W})$ et $v(P^{obj}_{BG}) = v(P^{obj}_{B})$,
- $0 < \Gamma_0 < n$ et alors nous avons $v(P^{obj}_{B}) \leq v(P^{obj}_{BG}) \leq v(P^{obj}_{WG}) \leq v(P^{obj}_{W})$.

## 3.2 L'approche de Bertsimas et Sim pour les second membres des contraintes

Dans le problème $(P)$, on suppose maintenant que l'incertitude porte sur les second membres des contraintes, soit $\overline{b} - \widehat{b} \leq b \leq \overline{b} + \widehat{b}$. Pour toute valeur de $b$, on suppose que le programme linéaire $P$ admet un optimum borné.

Pour modéliser l'incertitude, on introduit les variables $z_i$ pour chaque contrainte, de la façon suivante : $b_i = \overline{b}_i + z_i\widehat{b}_i$ avec $-1 \leq z_i \leq 1$. On représente alors l'ensemble des déviations $z = (z_i)_{i=1,\dots,m}$ par un vecteur colonne de dimension $m$. Une application directe, du modèle de Bertsimas et Sim, conduit à introduire un paramètre $\Gamma_i \in [0,1]$ par contrainte, et à rechercher la pire solution dans ces budgets d'incertitude. Compte tenu de la forme des contraintes, le pire cas se réalise lorsqu'on augmente le second membre de chaque contrainte, c'est-à-dire pour $z_i = \Gamma_i$. La version robuste du programme linéaire $(P)$ est donc le programme linéaire $(P_{ber})$ suivant :

$$(P_{ber}) \begin{cases} \min & cx \\ s.t & Ax \geq \overline{b} + \Gamma\widehat{b} \\ & x \geq 0 \end{cases}$$

On retrouve bien le critère du pire cas lorsque $\Gamma_i = 1$ pour toutes les contraintes $i$ et on garde bien la polynomialité du problème initial. Par contre, en terme de robustesse le modèle est moins intéressant puisqu'il conduit à décider sur la base d'un scénario unique totalement induit par le vecteur $\Gamma$.

Puisque le modèle de Bertsimas et Sim permet de gérer l'incertitude portant sur les coefficients de la fonction objectif, mais semble moins pertinent pour gérer l'incertitude sur les second membres des contraintes, on peut donc naturellement travailler sur le dual pour se ramener au cas où l'incertitude porte sur les coefficients de la fonction objectif. Nous rappelons que le dual $(D)$ s'écrit :

$$(D) \begin{cases} \max & b^t y \\ s.t & A^t y \leq c^t \\ & y \geq 0 \end{cases}$$

Comme préconisé dans la section précédente, le critère à appliquer sur le programme dual est celui du meilleur cas généralisé dans lequel $\Gamma_0$ est un paramètre qui délimite le budget d'incertitude autorisé sur les coefficients de la fonction objectif du programme dual. Pour un problème de maximisation, la version duale devient $(D_{BG}^{obj})$ :

$$v(D_{BG}^{obj}) = \max_{\substack{A^t y \le c^t \\ y \ge 0}} \left( \overline{b}^t y + \max_{\substack{\sum_{i=1}^m z_i \le \Gamma_0 \\ 0 \le z_i \le 1}} z^t \widehat{B} y \right)$$

où $\widehat{B}$ est une matrice diagonale dont les éléments diagonaux sont $\widehat{b}_i$. Ce dernier problème est équivalent à :

$$(D_{BG}^{obj}) \begin{cases} \max & \overline{b}^t y + z^t \widehat{B} y \\ s.t & A^t y \le c^t \\ & \sum_{i=1}^m z_i \le \Gamma_0 \\ & 0 \le z_i \le 1, \ \forall i = 1, \dots m \\ & y \ge 0 \end{cases}$$

On peut alors décomposer $(D_{BG}^{obj})$ différemment et l'écrire comme suit.

$$\max_{\substack{\sum_{i=1}^m z_i \le \Gamma_0 \\ 0 \le z_i \le 1}} \max_{\substack{A^t y \le c^t \\ y \ge 0}} \left( \overline{b}^t y + z^t \widehat{B} y \right)$$

Pour une valeur de $z$ fixée, notons $(D_z)$ le programme linéaire :

$$(D_z) \begin{cases} \max & \overline{b}^t y + z^t \widehat{B} y \\ s.t & A^t y \le c^t \\ & y \ge 0 \end{cases}$$

Le dual de $(D_z)$, noté $(P_z)$, correspond au problème $(P)$ initial défini pour le scénario induit par $z$ :

$$(P_z) \begin{cases} \min & cx \\ s.t & Ax \ge \overline{b} + z^t \widehat{B} \\ & x \ge 0 \end{cases}$$

Par hypothèse $(P_z)$ admet un optimum fini et, de part le théorème fort de la dualité, on peut remplacer $v(D_z)$ par $v(P_z)$. $(D_{BG}^{obj})$ devient alors :

$$v(D_{BG}^{obj}) = \max_{\substack{\sum_{i=1}^m z_i \le \Gamma_0 \\ 0 \le z_i \le 1}} v(P_z)$$

Le fait de travailler sur le dual et d'appliquer le critère du meilleur cas généralisé ne nous ramène pas à une application directe de Bertsimas et Sim mais nous a permis d'étendre la notion de budget d'incertitude. Ceci revient à introduire un budget d'incertitude global $\Gamma_0$ portant sur l'ensemble des second membres et à chercher la valeur du pire optimum dans ce budget. Ce nouveau problème a davantage de signification en terme de robustesse et généralise bien le critère du pire cas ainsi que le problème associé à savoir $(P_W^{rhs})$. En effet, si $\Gamma_0 = m$, la valeur optimale de $z_i$ vaut 1 pour tout $i = 1, \ldots, m$ et on retrouve exactement le problème $(P_W^{rhs})$. Par contre, cette version robuste ne préserve pas la linéarité du problème de départ, et, le problème à résoudre, noté $(P_{WG}^{rhs})$, est difficile. Ce problème revient à déterminer le pire optimum du problème $(P)$ sachant que l'on autorise au plus $\Gamma_0$ contraintes à dévier de leur valeur nominale (en étant plus restreintes). On constate donc la relation suivante :

$$v(P_{WG}^{rhs}) = v(D_{BG}^{obj}).$$

**Exemple 3** *Reprenons le programme linéaire de l'exemple 1 et considérons trois valeurs pour* $\Gamma_0$ *:*

- $\Gamma_0 = 2$ *: on autorise alors la restriction des 2 contraintes de* $(P)$ *et l'on obtient* $(P_W^{rhs})$*, de valeur* $53/3$ *;*
- $\Gamma_0 = 0$ *: on n'autorise aucune déviation sur les contraintes ce qui revient à résoudre le problème nominal de valeur* $22/3$ *;*
- $\Gamma_0 = 1$ *: on autorise la restriction d'une partie des 2 contraintes de* $(P)$ *: soit une des deux, soit une fraction de la première et une fraction de la seconde. La version du pire cas généralisé détermine ce qui peut arriver de pire sous cette hypothèse.*

*Pour résoudre* $(P_{WG}^{rhs})$ *avec* $\Gamma_0 = 1$*, il faut donc résoudre le programme suivant :*

$$v(P_{WG}^{rhs}) = \max_{\substack{z_1+z_2\leq 1\\ z_1\geq 0, z_2\geq 0}} \min_{\substack{x_1+2x_2\geq 3+2z_1\\ x_1-x_2\geq 1+3z_2\\ x_1\geq 0, x_2\geq 0}} (4x_1 + x_2)$$

*Pour résoudre ce problème, nous passons à sa version duale qui consiste à optimiser :*

$$(D_{BG}^{obj}) \left\{ \begin{array}{rl} \max & 3y_1 + y_2 + 2y_1z_1 + 3y_2z_2 \\ s.t & y_1 + y_2 \leq 4 \\ & 2y_1 - y_2 \leq 1 \\ & z_1 + z_2 \leq 1 \\ & y_1 \geq 0, y_2 \geq 0, z_1 \geq 0, z_2 \geq 0 \end{array} \right.$$

*qui admet comme solution optimale :* $y_1 = 0$*,* $y_2 = 4$*,* $z_1 = 0$ *et* $z_2 = 1$ *de valeur* $v(D^{obj}_{BG}) = v(P^{rhs}_{WG}) = 16$*. Dans le primal, cela correspond à la solution* $x_1^{WG} = 4$ *et* $x_2^{WG} = 0$*. Cette valeur représente le pire qui puisse arriver pour le problème* $(P)$ *initial si l'on envisage au plus "l'équivalent" de 1 contrainte plus restreinte.*

Du reste, de façon symétrique, le problème robuste $(P^{obj}_{WG})$ avec incertitude sur les coefficients de la fonction objectif étant un programme linéaire présenté dans en section 3.1, on peut écrire directement son dual et on obtient :

$$\left\{\begin{array}{ll} \max & b^t y \\ s.t & \sum_{i=1}^m a_{ij} y_i - \widehat{c}_j z_j \leq \overline{c}_j \\ & \sum_{j=1}^n z_j \leq \Gamma_0 \\ & z_j \leq 1, \forall j = 1, \ldots, n \\ & y_i, z_j \geq 0 \end{array}\right.$$

qui n'est autre que le problème du meilleur cas sur le dual avec incertitude sur les second membres des contraintes pour un budget $\Gamma_0$ fixé qui correspond cette fois au nombre maximum de contraintes que l'on s'autorise à relâcher. On a donc la relation : $v(P^{obj}_{WG}) = v(D^{rhs}_{BG})$.

**Exemple 4** *Reprenons le programme linéaire de l'exemple 1 et considérons 3 valeurs possibles pour* $\Gamma_0$ *:*

- $\Gamma_0 = 2$ *: on s'autorise à relâcher les 2 contraintes de* $(P)$ *et on obtient alors* $(P^{rhs}_{B})$*, de valeur* $1/2$ *;*
- $\Gamma_0 = 0$ *: aucune déviation n'est permise sur les contraintes ce qui revient à considérer le problème nominal de valeur* $22/3$ *;*
- $\Gamma_0 = 1$ *: on relâche une partie des 2 contraintes de* $(P)$ *: soit une des deux, soit une fraction de la première et une fraction de la seconde et on détermine la meilleure solution sous cette hypothèse.*

*Pour résoudre* $(P^{rhs}_{BG})$ *avec* $\Gamma_0 = 1$*, il faut donc résoudre le programme :*

$$(P^{rhs}_{BG}) \left\{\begin{array}{ll} \min & 4x_1 + x_2 \\ s.t & x_1 + x_2 \geq 3 - 2z_1 \\ & x_1 - x_2 \geq 1 - 3z_2 \\ & z_1 + z_2 \leq 1 \\ & x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, z_1 \geq 0, z_2 \geq 0 \end{array}\right.$$

*qui admet comme solution optimale :* $x_1^{BG} = 0$*,* $x_2^{BG} = 5/4$*,* $z_1^{BG} = 1/4$ *et* $z_2^{BG} = 3/4$ *de valeur* $v(P_{BG}^{rhs}) = 5/4$*. Cette valeur représente le mieux qui puisse arriver pour le problème* $(P)$ *initial si l'on s'autorise au plus "l'équivalent" de 1 contrainte relâchée. Nous voyons dans ce cas, que les variables* $z_i$ *ne sont pas nécessairement binaires.*

En conclusion, il existe des relations de dualité forte entre les versions robustes de $(P)$ et $(D)$ si on prend soin de dualiser le critère de robustesse : pire cas (généralisé) versus meilleur cas (généralisé).
Pour mesurer la robustesse d'une solution, le critère du regret maximum est lui aussi largement utilisé. Beaucoup de résultats ont déjà été obtenus lorsque l'incertitude porte sur les coefficients de la fonction objectif. Après les avoir rappelé, nous étudions le cas spécifique des incertitudes sur les second membres des contraintes.

# 4 La robustesse selon le critère du regret

## 4.1 Incertitude sur les coefficients de la fonction objectif

Dans le problème $(P)$, on suppose que l'incertitude porte sur les coefficients de la fonction objectif, soit $\overline{c} - \widehat{c} \leq c \leq \overline{c} + \widehat{c}$, avec $\widehat{c} \geq 0$.

Pour une solution $x$ et un scénario $c$, le regret, noté $reg(x, c)$, se définit comme la différence entre la valeur de la solution $x$ pour le scénario $c$ et la valeur de la solution optimale pour le scénario $c$ :

$$reg(x, c) = cx - \min_{\substack{Ay \geq b \\ y \geq 0}} cy$$

Il s'agit ici de mesurer le manque à gagner d'avoir fait le choix de $x$ pour le scénario $c$.
Evaluer une solution $x$ selon le critère du regret consiste, à évaluer $x$ selon le plus grand regret qu'elle puisse engendrer, à savoir :

$$f_{reg}(x) = \max_{\overline{c} - \widehat{c} \leq c \leq \overline{c} + \widehat{c}} \left( cx - \min_{\substack{Ay \geq b \\ y \geq 0}} cy \right) = \max_{\substack{\overline{c} - \widehat{c} \leq c \leq \overline{c} + \widehat{c} \\ Ay \geq b \\ y \geq 0}} c(x - y)$$

Averback et Lebedev ont montré dans [1] que le problème de calculer $f_{reg}(x)$ pour une solution $x$ fixée est NP-difficile.

Selon le critère du regret maximum, la version robuste de $(P)$ consiste à résoudre le problème $(P_R^{obj})$ ci-dessous :

$$v(P_R^{obj}) = \min_{\substack{Ax \geq b \\ x \geq 0}} \max_{\substack{\bar{c}-\hat{c} \leq c \leq \bar{c}+\hat{c} \\ Ay \geq b \\ y \geq 0}} c(x-y)$$

Dans [6], Inuiguchi et sakawa montrent que, pour la résolution de $(P_R^{obj})$, il n'est pas nécessaire de considérer tout l'intervalle de variation possible sur les $c$, mais il suffit de considérer uniquement les valeurs extrêmes de l'intervalle. Un scénario $(c_1, \ldots, c_n)$ est extrême si $\forall j = 1, \ldots n$, on a $c_j = \overline{c}_j$ ou $c_j = \underline{c}_j$. On note $S$ l'ensemble des $2^n$ scénarios extrêmes. Ainsi, on a :

$$v(P_R^{obj}) = \min_{\substack{Ax \geq b \\ x \geq 0}} \max_{\substack{c \in S \\ Ay \geq b \\ y \geq 0}} c(x-y)$$

Or, pour un scénario $c$ il est facile de calculer la solution optimale notée $y^c$ correspondante. Il est alors possible de linéariser $(P_R^{obj})$ en introduisant une nouvelle variable, que nous noterons $r$, et autant de contraintes qu'il n'y a de scénarios extrêmes. Nous obtenons alors :

$$v(P_R^{obj}) = \begin{cases} \min & r \\ s.t & r \geq c(x - y^c) \quad \forall c \in S \\ & Ax \geq b \\ & x \geq 0 \end{cases}$$

**Exemple 5** *Reprenons le problème de l'exemple1, et examinons son dual dans lequel l'incertitude porte sur les coefficients de la fonction objectif. Dans ce cas, sous le critère du regret maximum, la version robuste du dual devient :*

$$v(D_R^{obj}) = \min_{\substack{y_1+y_2 \leq 4 \\ 2y_1-y_2 \leq 1 \\ y_1 \geq 0, y_2 \geq 0}} \max_{\substack{1 \leq b_1 \leq 5 \\ -2 \leq b_2 \leq 4 \\ t_1+t_2 \leq 4 \\ 2t_1-t_2 \leq 1 \\ t_1 \geq 0, t_2 \geq 0}} (b_1(t_1-y_1) + b_2(t_2-y_2))$$

*Considérons l'ensemble des scénarios extrêmes :*

- *Pour* $b = (1, -2)$ *la solution optimale du dual est* $(1/2, 0)$ *de valeur* $1/2$. *Toute solution* $(y_1, y_2)$ *va donc induire un regret de* $1/2 - y_1 + 2y_2$ *pour ce scénario extrême.*

- *Pour* $b = (1, 4)$ *la solution optimale du dual est* $(0, 4)$ *de valeur* $16$. *Toute solution* $(y_1, y_2)$ *va donc induire un regret de* $16 - y_1 - 4y_2$ *pour ce scénario extrême.*

- *Pour* $b = (5, -2)$ *la solution optimale du dual est* $(5/3, 7/3)$ *de valeur* $11/3$. *Toute solution* $(y_1, y_2)$ *va donc induire un regret de* $11/3 - 5y_1 + 2y_2$ *pour ce scénario extrême.*

- *Pour* $b = (5, 4)$ *la solution optimale du dual est* $(5/3, 7/3)$ *de valeur* $53/3$. *Toute solution* $(y_1, y_2)$ *va donc induire un regret de* $53/3 - 5y_1 - 4y_2$ *pour ce scénario extrême.*

*Le regret maximum, représenté par la variable* $r$ *devra donc être plus grand que chacun de ces regrets, et par conséquent :*

$$(D_R^{obj}) \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rl} \min & r \\ s.t & r \geq 1/2 - y_1 + 2y_2 \\ & r \geq 16 - y_1 - 4y_2 \\ & r \geq 11/3 - 5y_1 + 2y_2 \\ & r \geq 53/3 - 5y_1 - 4y_2 \\ & y_1 + y_2 \leq 4 \\ & 2y_1 - y_2 \leq 1 \\ & y_1 \geq 0, y_2 \geq 0 \end{array} \right.$$

*La solution optimale de ce problème est* $y_1 = 17/12$, $y_2 = 31/12$ *et* $r = 17/4$. *Or, si l'on se place dans l'espace des solutions réalisables du dual, on constate que cette solution ne correspond pas à un sommet, mais est un point intérieur.*

## 4.2 Incertitude sur les second membres des contraintes

Dans le problème $(P)$, on suppose que l'incertitude porte sur les second membres des contraintes, soit $\overline{b} - \widehat{b} \leq b \leq \overline{b} + \widehat{b}$, avec $\widehat{b} \geq 0$.

Pour calculer le regret d'une solution $x$ pour un scénario $b$, il faut considérer 2 cas :

- $x \in X^b$, alors $reg(x,b) = cx - \min_{\substack{Ay\geq b\\ y\geq 0}} cy$,
- $x \notin X^b$, alors $reg(x,b) = +\infty$

Si on considère une solution $x$ qui n'est pas réalisable sur tous les scénarios, alors $f_{reg}(x) = \max\limits_{\bar{b}-\hat{b}\leq b\leq \bar{b}+\hat{b}} reg(x,b) = +\infty$. Tout comme dans le critère du pire cas, la solution qui minimise $f_{reg}(x)$ se trouve nécessairement parmi les solutions réalisables sur tous les scénarios : elle appartient donc à $X^{\bar{b}+\hat{b}}$. Dans ce cas, $\forall x \in X^{\bar{b}+\hat{b}}$ nous aurons :

$$f_{reg}(x) = \max_{\bar{b}-\hat{b}\leq b\leq \bar{b}+\hat{b}} \left( cx - \min_{\substack{Ay\geq b\\ y\geq 0}} cy \right) = cx - \min_{\substack{Ay\geq b\\ \bar{b}-\hat{b}\leq b\leq \bar{b}+\hat{b}\\ y\geq 0}} cy = cx - \min_{\substack{Ay\geq \bar{b}-\hat{b}\\ y\geq 0}} cy$$

Le problème, noté $(P_R^{rhs})$, de déterminer la solution qui minimise $f_{reg}(x)$ sera donc tel que :

$$\begin{aligned} v(P_R^{rhs}) &= \min_{x\in X^{\bar{b}+\hat{b}}} f_{reg}(x) \\ &= \min_{x\in X^{\bar{b}+\hat{b}}} \left( cx - \min_{\substack{Ay\geq \bar{b}-\hat{b}\\ y\geq 0}} cy \right) \\ &= \min_{\substack{Ax\geq \bar{b}+\hat{b}\\ x\geq 0}} cx - \min_{\substack{Ay\geq \bar{b}-\hat{b}\\ y\geq 0}} cy \\ &= v(P_W^{rhs}) - v(P_B^{rhs}) \end{aligned}$$

En conséquence, la solution optimale selon le critère du regret maximum correspond exactement à la solution optimale selon le critère du pire cas. Les problèmes $(P_W^{rhs})$ et $(P_B^{rhs})$ étant des programmes linéaires, le problème $(P_R^{rhs})$ est d'une complexité similaire à celle de $(P)$. Aussi, $(P_R^{rhs})$ est un problème facile car équivalent à $v(P_W^{rhs})$ alors que, dans le cas d'incertitude sur les coefficients de la fonction objectif, $(P_R^{obj})$ est NP- difficile mais porte un autre point de vue sur la robustesse que celui du critère du pire cas. De plus, les solutions optimales $(P_R^{obj})$ pouvant être des solutions intérieures au polyèdre, le "transfert" de l'incertitude des coefficients de la fonction objectif vers les second membres des contraintes du problème dual ne peut être exploité.

**Exemple 6** *Dans la solution optimale de* $(D_R^{obj})$*, on trouve* $y_1$*, variable duale associée à la première contrainte de* $(P)$*, strictement positive et* $y_2$*, variable duale associée à la seconde contrainte de* $(P)$*, strictement positive, ce qui implique, d'après les relations d'exclusion :* $x_1 + 2x_2 = b_1$ *et* $x_1 - x_2 = b_2$*. Par ailleurs, le regret maximum, de valeur* $17/4$*, provient soit de* $b = (1, -2)$*, soit de* $b = (1, 4)$*. Considérons le premier scénario extrême pour* $(P)$*, la solution satisfaisant les relations d'exclusion a pour coordonnées* $(-1, 1)$*. Si on considère maintenant le second scénario extrême, la solution satisfaisant les relations d'exclusion a pour coordonnées* $(3, -1)$*. Aucune de ces solutions n'est réalisable pour* $(P)$*.*

# 5 Conclusion

Nous considérons des programmes linéaires dont certains coefficients sont entachés d'incertitude et d'indétermination. La valeur d'un coefficient incertain est approximée par un intervalle de valeurs plausibles. Un certain nombre de résultats a déjà été obtenu lorsque les coefficients incertains sont ceux de la fonction objectif. Les programmes linéaires dans lequels l'incertitude porte uniquement sur les second membres des contraintes n'a pas donné lieu (ou très peu) à des études spécifiques. Les travaux de Bertsimas et Sim ne s'appliquent pas de façon intéressante à ce cas particulier.

Nous montrons dans ce papier de quelle façon il est possible de transférer l'incertitude des second membres des contraintes vers les coefficients de la fonction objectif à l'aide de nouvelles relations de dualité. Nous proposons également une extension du modèle de Bertsimas et Sim au cas particulier d'incertitude sur les second membres uniquement et établissons des relations de dualité similaires. Par ailleurs, nous établissons dans ce même cas que la version robuste selon le critère du regret maximum est équivalente à la version robuste selon le critère du pire cas.

Nous montrons ainsi que :

- optimiser la version robuste selon le critère du pire cas (généralisé) d'un programme linéaire avec coefficients incertains dans la fonction objectif revient à déterminer l'optimum selon le critère du meilleur cas (généralisé) du programme linéaire dual (avec second membres incertains),
- optimiser la version robuste selon le critère du pire cas (généralisé) d'un

programme linéaire avec second membres incertains revient à déterminer l'optimum selon le critère du meilleur cas (généralisé) du programme linéaire dual (avec coefficients incertains dans la fonction objectif).

Le tableau ci-dessous synthétise nos résultats :

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| Version robuste | $(P_W^{obj})$ | $(P_W^{rhs})$ | $(P_{WG}^{obj})$ | $(P_{WG}^{rhs})$ |
| Version duale | $(D_B^{rhs})$ | $(D_B^{obj})$ | $(D_{BG}^{rhs})$ | $(D_{BG}^{obj})$ |

Dans ce tableau, tous les problèmes sont des programmes linéaires à l'exception de ceux de la dernière colonne, qui sont des programmes quadratiques difficiles à résoudre. Leurs résolutions exacte et approchée méritent toute notre attention puisque que ces versions nuancent utilement les versions robustes (plus simples) selon le critère du pire cas.

# References


[1] I. Averbakh and V. Lebedev. On the complexity of minmax regret linear programming. *European Journal of Operational Research*, 160:227–231, 2005.

[2] A. Ben-Tal and A. Nemirovski. Robust solutions of uncertain linear programs. *Operations Research Letters*, 25:1–13, 1999.

[3] D. Bertsimas and M. Sim. Robust discrete optimization and network flows. *Math. Program., Ser. B*, 98:49–71, 2003.

[4] D. Bertsimas and M. Sim. The price of robustness. *Operations Research*, 52(1):35–53, 2004.

[5] J.W. Chinneck and K. Ramadan. Linear programming with interval coefficients. *The Journal of the Operational Research Society*, 51(2):209–220, 2000.

[6] M. Inuiguchi and M. Sakawa. Minimax regret solution to linear programming problems with an interval objective function. *European Journal of Operational Research*, 86:526–536, 1995.

[7] P. Kouvelis and G. Yu. *Robust dicrete optimization and its applications*. Kluwer Academic Publishers, Boston, 1997.

[8] H.E. Mausser and M. Laguna. A new mixed integer formulation for the maximum regret problem. *International Transaction on Operational Research*, 5(5):389–403, 1998.

[9] H.E. Mausser and M. Laguna. A heuristic to minimax absolute regret for linear programs with interval objective function coefficients. *European Journal of operational Research*, 117:157–174, 1999.

[10] M. Minoux. Duality, robustness, and 2-stage robust lp decision models. Technical Report 7, Robustness in OR-DA, Annales du LAMSADE, 2007.

[11] B. Roy. *Flexibilité et Robustesse en Ordonnancement*, chapter A propos de robustesse en recherche Opérationnelle et Aide à la Décision. Hermès, Paris, 2005.

[12] A.L. Soyster. Convex programming with set-inclusive constraints and applications to inexact linear programming. *Operations Research*, 21:1154–1157, 1973.

[13] P. Vincke. Robust solutions and methods in decision-aid. *Journal of multicriteria decision analysis*, 8:181–187, 1999.